

Fourieranalyse kontinuierlicher und abgetasteter Signale

<http://www.siart.de/lehre/fourier.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

15. September 2013 (Version 0.30)

Inhaltsverzeichnis

1	Spektren von Funktionen	1
2	Spektren von Folgen	3
3	Fourierreihen	6
4	Diskrete Fouriertransformation	7

1 Spektren von Funktionen

Einer Funktion $v(t)$ wird über das Fouriertransformationspaar

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1a)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1b)$$

eine Funktion $V(j\omega)$ zugeordnet, die man das *Spektrum* der Funktion $v(t)$ nennt. Man erkennt, dass $v(t)$ durch diese Transformation dargestellt wird als Überlagerung von (unendlich vielen) komplexen Schwingungen der Form $e^{j\omega t}$. Sie haben die infinitesimalen komplexen Amplituden $V(j\omega) d\omega$, weshalb man $V(j\omega)$ auch als *spektrale Amplitudendichte* oder kurz *Spektraldichte* bezeichnet. Damit das Fouriertransformationsintegral (1a) existiert, muss $v(t)$ absolut integrierbar sein und darf in einem beschränkten Intervall auch nur eine endliche Bogenlänge haben. Die meisten praktisch relevanten Funktionen erfüllen diese Voraussetzung. Die Zuordnung von Funktion und Fourierpektrum wird in der Schreibweise

$$v(t) \circ\!\!\!\rightarrow V(j\omega)$$

mit dem Korrespondenzsymbol dargestellt. Von der Definition (1) der Fouriertransformation lassen sich unter anderem folgende Eigenschaften ableiten:

$$\sum_v a_v v_v(t) \circ \bullet \sum_v a_v V_v(j\omega) \quad \text{Linearität} \quad (2a)$$

$$v(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} \cdot V(j\omega) \quad \text{Verschiebung} \quad (2b)$$

$$e^{j\omega_0 t} \cdot v(t) \circ \bullet V(j(\omega - \omega_0)) \quad \text{Modulation} \quad (2c)$$

$$v(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} V\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{Ähnlichkeit} \quad (2d)$$

$$V(j\omega) \circ \bullet 2\pi \cdot v(-\omega) \quad \text{Symmetrie} \quad (2e)$$

$$\frac{d^\mu v(t)}{dt^\mu} \circ \bullet (j\omega)^\mu \cdot V(j\omega) \quad \text{Differenziation von } v(t) \quad (2f)$$

$$(-t)^\mu \cdot v(t) \circ \bullet \frac{d^\mu V(j\omega)}{d(j\omega)^\mu} \quad \text{Differenziation von } V(j\omega) \quad (2g)$$

$$v_1(t) * v_2(t) \circ \bullet V_1(j\omega) \cdot V_2(j\omega) \quad \text{Faltung} \quad (2h)$$

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} V_1(j\omega) * V_2(j\omega) \quad \text{Multiplikation} \quad (2i)$$

Zerlegt man $v(t)$ und $V(j\omega)$ in ihre Real- und Imaginärteile und diese wiederum in ihre geraden und ungeraden Anteile, dann gelten folgende Korrespondenzen:

$$\begin{array}{l} v(t) = v_g^{(R)}(t) + v_u^{(R)}(t) + jv_g^{(I)}(t) + jv_u^{(I)}(t) \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ V(j\omega) = V_g^{(R)}(j\omega) + V_u^{(R)}(j\omega) + jV_g^{(I)}(j\omega) + jV_u^{(I)}(j\omega). \end{array}$$

Dabei bezeichnen die tiefgestellten Indizes »g« und »u« den geraden und den ungeraden Anteil und die hochgestellten Indizes »(R)« und »(I)« den Real- und den Imaginärteil. Aus diesen Korrespondenzen folgt insbesondere, dass

$$v(-t) \circ \bullet V(-j\omega) \quad \text{und} \quad v^*(t) \circ \bullet V^*(-j\omega)$$

und dass die Fouriertransformierte einer rein reellen Funktion $v(t)$ konjugiert gerade ist.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich von bereits bekannten Transformationspaaren

weitere Korrespondenzen ableiten. Einige nützliche Korrespondenzen für diesen Zweck sind:

$$\delta_0(t) \circ \bullet 1 \quad (3a)$$

$$\delta_0(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} \quad (3b)$$

$$1 \circ \bullet 2\pi \cdot \delta_0(\omega) \quad (3c)$$

$$e^{j\omega_0 t} \circ \bullet 2\pi \cdot \delta_0(\omega - \omega_0) \quad (3d)$$

$$\cos(\omega_0 t) \circ \bullet \pi \cdot \left(\delta_0(\omega - \omega_0) + \delta_0(\omega + \omega_0) \right) \quad (3e)$$

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet -j\pi \cdot \left(\delta_0(\omega - \omega_0) - \delta_0(\omega + \omega_0) \right) \quad (3f)$$

$$\delta_{-1}(t) \circ \bullet \pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3g)$$

Dabei sind $\delta_0(t)$ die Dirac-Delta-Distribution (Impulsfunktion) und $\delta_{-1}(t)$ die Heaviside-Funktion (Sprungfunktion). Aus deren Spektren lässt sich eine Vielzahl weiterer Korrespondenzen mit Hilfe der Eigenschaften (2) und den Zerlegungen

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (4a)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (4b)$$

ableiten. Beispielsweise lässt sich der Rechteckimpuls in der Form

$$\text{rect}(t) = \delta_{-1}(t + 1/2) - \delta_{-1}(t - 1/2) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

darstellen als Überlagerung zweier verschobener Sprungfunktionen. Daraus folgt auf einfache Weise das Spektrum eines um $t = 0$ zentrierten Rechteckimpulses der Dauer T sowie umgekehrt die zu einem konstanten Tiefpassspektrum mit Grenzfrequenz ω_g gehörende Impulsform im Zeitbereich:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \circ \bullet T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (6a)$$

$$\frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_g t/2)}{\omega_g t/2} \circ \bullet \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) \quad (6b)$$

Diese Zusammenhänge sind in Abb. 1 grafisch und in normierter Form dargestellt.

2 Spektren von Folgen

Das Spektrum einer Folge $v[k]$ ist definiert durch

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \cdot e^{-j\Omega k} = \mathcal{F}_* \{v[k]\} \quad (7a)$$

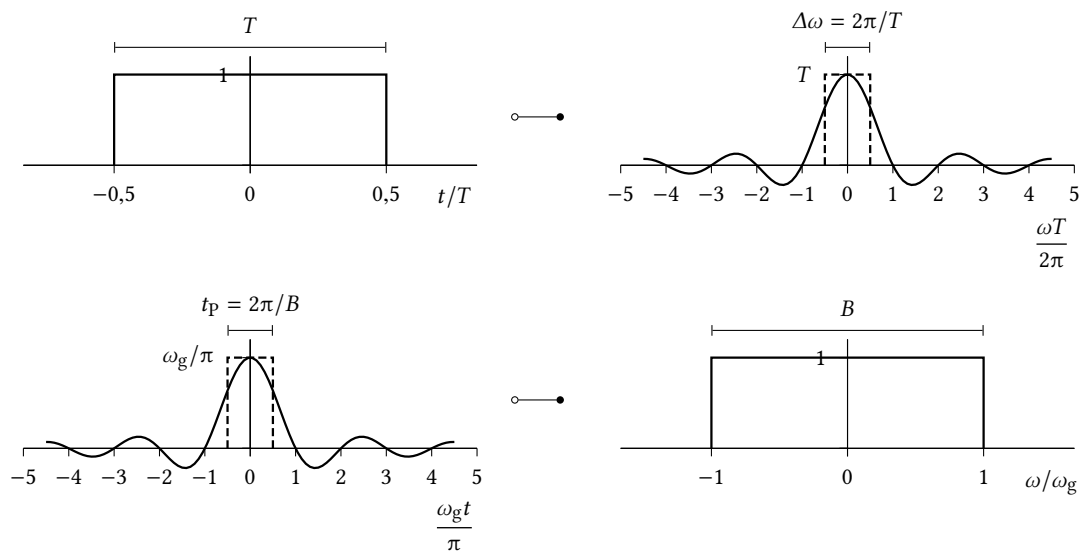


Abb. 1: Fouriertransformationspaare von Rechteckfunktionen

und die Folgenglieder erhält man durch die Rücktransformation

$$v[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega k} d\Omega = \mathcal{F}_*^{-1}\{V(e^{j\Omega})\}. \quad (7b)$$

Das Spektrum $V(e^{j\Omega})$ einer zeitdiskreten Funktion (einer Folge) ist offensichtlich periodisch in Ω mit der Periode 2π .

Darstellung abgetasteter Funktionen

Durch Abtastung einer kontinuierlichen Funktion $v_0(t)$ mit dem Abtastintervall T an den Zeitpunkten $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, entsteht die Folge $v[k] = v_0(kT)$ der Abtastwerte. Bei Abtastung einer periodischen Funktion $e^{j\omega t}$ bzw. $\sin(\omega t)$ ergeben sich mit der normierten Frequenz $\Omega = \omega T$ die Darstellungen $e^{j\Omega k}$ bzw. $\sin(\Omega k)$ für die entsprechenden Abtastfolgen. Der Wert der normierten Frequenz Ω stellt also das Winkelinkrement zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastwerten $v[k]$ und $v[k + 1]$ dar. Die Abtastung einer periodischen Funktion ist eindeutig, solange das Winkelinkrement Ω ein Intervall der Breite 2π nicht verlässt. Falls Ω negative Werte annehmen kann, ist also $-\pi \leq \Omega < \pi$ zu fordern. Wenn sichergestellt ist, dass Ω positiv ist, so muss für die Eindeutigkeit $0 \leq \Omega < 2\pi$ gewährleistet sein.

Durch eine problemangepasste Darstellung der normierten Frequenz Ω lassen sich die Eigenschaften von numerisch erzeugten Testfolgen gezielt steuern. Eine harmonische Folge hat die Darstellung

$$v[k] = A \cdot \cos(\Omega k + \varphi) \quad (8)$$

mit der Amplitude A und der Nullphase φ . Durch die Substitution $T = 1/f_A$ mit der Abtastfrequenz f_A erhält man $\Omega = 2\pi f/f_A$ und somit die Darstellung

$$v[k] = A \cdot \cos\left(2\pi \frac{f}{f_A} k + \varphi\right), \quad (9)$$

sodass die Signalfrequenz f direkt in Bruchteilen f/f_A der Abtastfrequenz angegeben werden kann. Mit der Gesamtlänge M des Abtastfensters und der gewünschten Anzahl K der Perioden innerhalb des Abtastfensters gilt $\Omega = 2\pi K/M$ und die Signalfolge kann auch geschrieben werden als

$$v[k] = A \cdot \cos\left(2\pi \frac{K}{M} k + \varphi\right), \quad (10)$$

sodass auf diese Weise eine Signalfolge unter Vorgabe der Anzahl K der Perioden erzeugt werden kann.

Spektren abgetasteter Funktionen

Betrachtet man

$$V_0(j\omega) = \mathcal{F}\{v_0(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(t) e^{-j\omega t} dt$$

und

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}_*\{v[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \cdot e^{-j\Omega k}, \quad \Omega = \omega T$$

so erhält man den Ausdruck für $V(e^{j\Omega})$ durch numerische Auswertung des Fourierintegrals mit Hilfe der Rechteckregel (bis auf den Faktor T). Weil $V(e^{j\Omega})$ eine periodische Funktion ist, kann die näherungsweise Übereinstimmung aber nur für eine Periode $|\omega| \leq \pi/T$ gelten. Es stellt sich heraus, dass

$$V(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} V_0[j(\Omega + 2\mu\pi)/T] \quad (11)$$

bis auf den möglichen Unterschied einer Nullfunktion gilt. Das Spektrum der Folge $v[k]$ ist also eine Überlagerung verschobener Spektren der Funktion $v_0(t)$ [16]. Gilt nun für das Spektrum $V_0(j\omega)$ der Funktion $v_0(t)$

$$V_0(j\omega) = 0 \quad \text{für} \quad |\omega| \geq \omega_g \quad (12)$$

und ist zusätzlich $T \leq \pi/\omega_g$ erfüllt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} v_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V_0(j\omega)\} &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_0(kT) e^{j\omega(t-kT)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_0(kT) \frac{\sin \pi(t/T - k)}{\pi(t/T - k)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Funktion $v_0(t)$ lässt sich also in diesem Fall exakt aus ihren Abtastwerten $v_0(kT)$ rekonstruieren durch Interpolation mit der Funktion

$$g_0(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}, \quad (14)$$

welche an die Positionen der Abtastzeitpunkte verschoben und mit dem dort jeweils vorliegenden Abtastwert gewichtet wird [14].

3 Fourierreihen

Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe einer periodischen Funktion mit der Eigenschaft $v(t) = v(t + \tau)$ sind

$$c_\nu = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t) e^{-j\nu\omega_0 t} dt \quad (15)$$

mit $\omega_0 = 2\pi/\tau$. Mit ihnen gilt

$$g(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu\omega_0 t}, \quad (16)$$

wobei die Übereinstimmung zwischen Fourier-Reihendarstellung und Originalfunktion durch

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} |v(t) - g(t)|^2 dt = 0 \quad (17)$$

gegeben ist. Für rein reelle Zeitfunktionen $v(t)$ folgt zunächst $c_{-\nu} = c_\nu^*$ und daraus mit $c_\nu = |c_\nu| e^{j\varphi_\nu}$

$$g(t) = c_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| \cos(\nu\omega_0 t + \varphi_\nu). \quad (18)$$

Die komplexe Fourierreihe (16) lässt sich in diesem Fall auch durch reelle Sinus- und Kosinusreihen in der Form

$$g(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\omega_0 t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin(\nu\omega_0 t) \quad (19)$$

schreiben. Dabei gilt

$$2c_\nu = \begin{cases} a_0 & \text{für } \nu = 0 \\ a_\nu - jb_\nu & \text{für } \nu > 0 \\ a_{-\nu} + jb_{-\nu} & \text{für } \nu < 0 \end{cases} \quad (20)$$

also umgekehrt

$$a_0 = 2c_0 \quad (21a)$$

$$a_\nu = \operatorname{Re}\{c_{-\nu} + c_\nu\} \quad (21b)$$

$$b_\nu = \operatorname{Im}\{c_{-\nu} - c_\nu\}. \quad (21c)$$

4 Diskrete Fouriertransformation

Für eine in k periodische Folge $\tilde{v}[k]$ mit der Periode M gilt

$$\tilde{v}[k] = \sum_{\nu=0}^{M-1} \tilde{c}_\nu e^{j\nu k 2\pi/M} \quad (22)$$

wenn

$$\tilde{c}_\nu = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}[k] e^{-j\nu k 2\pi/M} \quad (23)$$

gewählt wird. Auf diese Weise existiert eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen M Werten $\tilde{v}[k]$ und M Werten \tilde{c}_ν . Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Fourierreihe periodischer Folgen und den Fourierkoeffizienten periodischer Funktionen, der sich erschließt, wenn man annimmt, dass die hier betrachtete periodische Folge $\tilde{v}[k]$ durch Abtastung einer periodischen Funktion $v_0(t)$ in den Zeitpunkten $t = k\tau/M$ entstanden ist. Durch den Vergleich von

$$v_0(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu\omega_0 t}$$

mit

$$\tilde{v}[k] = v_0(t = k\tau/M) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu k 2\pi/M}$$

folgt

$$\tilde{c}_\nu = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{\nu+rM} = \tilde{c}_{\nu+\lambda M} \quad ; \quad \lambda, \nu \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Die Werte \tilde{c}_v stimmen mit den c_v überein, wenn

$$c_v = 0 \quad \forall |v| > n \quad (25)$$

gilt. Wählt man $M \geq 2n + 1$, so ist

$$\tilde{c}_v = \begin{cases} c_v & \text{für } v = 0(1)[M/2] \\ c_{v-M} & \text{für } v = ([M/2] + 1)(1)(M - 1). \end{cases} \quad (26)$$

Dabei ist $[M/2]$ die größte ganze Zahl $\leq M/2$.

Definition der Diskreten Fouriertransformation

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) wird durch die umkehrbar eindeutigen Zuordnungen

$$V[\mu] = \text{DFT}\{v[k]\} = \sum_{k=0}^{M-1} v[k] \cdot w_M^{\mu k}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M-1 \quad (27a)$$

$$v[k] = \text{DFT}^{-1}\{V[\mu]\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V[\mu] \cdot w_M^{-\mu k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (27b)$$

mit $w_M = e^{-j2\pi/M}$ als eigenständige Operation definiert. Der Bezug zur Fourierreihe periodischer Folgen wird klar, wenn man sich $v[k]$ als eine Periode der periodischen Folge $\tilde{v}[k]$ vorstellt.

Weil $v[k]$ eine Folge ist, ist ihre Fouriertransformierte $\tilde{V}[\mu]$ periodisch und es ist $V[\mu] = \tilde{V}[\mu] \cdot R_M[\mu]$ mit dem Rechteckfenster

$$R_M[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (28)$$

Die Periodizität von $\tilde{v}[k]$ ist ihrerseits eine Folge der Diskretisierung des Spektrums in Form der Folge $\tilde{V}[\mu]$ und es ist ebenso $v[k] = \tilde{v}[k] \cdot R_M[k]$.

Literatur

- [1] R. N. Bracewell: *The Fourier Transform and Its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [2] E. O. Brigham: *FFT. Schnelle Fourier-Transformation*. Hrsg. von A. Gottwald. Einführung in die Nachrichtentechnik. München: Oldenbourg, 1982.
- [3] H. F. Davis: *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Boston: Allyn and Bacon, 1963.
- [4] H. Dym and H. P. McKean: *Fourier Series and Integrals*. New York: Academic, 1972.
- [5] F. J. Harris: "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform". In: *Proceedings of the IEEE* 66.1 (January 1978), pp. 51–83.
- [6] K. D. Kammeyer und K. Kroschel: *Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit Matlab®-Übungen*. 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [7] A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. 2. Aufl. München: Oldenbourg, 1995.

- [8] A. V. Oppenheim und A. S. Willsky: *Signale und Systeme*. 2. Aufl. Weinheim: VCH-Verlagsgesellschaft, 1992.
- [9] S. J. Orfanidis: *Introduction to Signal Processing*. Rutgers University: 2010. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/> (visited on 01/27/2013).
- [10] S. J. Orfanidis: *Optimum Signal Processing*. 2nd ed. Rutgers University: 2007. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/osp2e/> (visited on 01/27/2013).
- [11] A. Papoulis: *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [12] J. G. Proakis and D. G. Manolakis: *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
- [13] C. M. Rader: "Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Samples is Prime". In: *Proceedings of the IEEE* 56 (1968), pp. 1107–1108.
- [14] H. W. Schüßler: *Analyse diskreter Signale und Systeme*. 5. Aufl. Bd. 1. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2008.
- [15] H. W. Schüßler: *Entwurf und Realisierung von digitalen Systemen*. Bd. 2. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2009.
- [16] H. W. Schüßler: *Theorie kontinuierlicher und diskreter Signale und Systeme*. 3. Aufl. Bd. 2. Netzwerke, Signale und Systeme. Berlin: Springer, 1991.
- [17] S. A. Tretter: *Discrete-Time Signal Processing*. New York: John Wiley, 1976.
- [18] P. D. Welch: "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra". In: *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* AUEA-15 (June 1970), pp. 70–73.