

Lineare Mehrtorschaltungen

Uwe Siart
tutorien@siart.de

13. Juni 2014 (Version 0.59)

Zusammenfassung

Dieses Tutorium möchte eine kurze Einführung in die Behandlung linearer Mehrtorschaltungen insbesondere im Bereich der Hochfrequenztechnik geben. Dazu wird zunächst der Begriff des »Tores« definiert. Danach folgt ausgehend von Torspannungen und -strömen die Einführung einer äquivalenten Beschreibung durch Wellengrößen und Streuparameter sowie die Behandlung einiger Beispiele für Zusammenschaltungen von Mehrtoren. Die neueste Version ist unter dem URL <http://www.siart.de/lehre/mehrtore.pdf> erhältlich.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Tordefinition | 2 |
| 1.1 | Betriebszustand von Toren | 2 |
| 1.2 | Torgrößen | 3 |
| 2 | Charakterisierung von linearen Mehrtoren | 5 |
| 3 | Schaltungen aus linearen Mehrtoren | 6 |
| 3.1 | Kettenschaltung von Zweitoren | 6 |
| 3.2 | Abschluss mit einem Eintor | 7 |
| 3.3 | Ersatzwellenquelle | 8 |
| 3.4 | Reflektometerschaltung | 10 |

1 Tordefinition

1.1 Betriebszustand von Toren

Ein Klemmenpaar eines Netzwerkes bezeichnet man als Tor, wenn ein ganz bestimmter Betriebszustand vorliegt und durch die Beschaltung sichergestellt ist. Die Definition dieses Betriebszustandes gründet auf der Tatsache, dass eine beliebige Funktion $F(x)$ stets in einen geraden Anteil $G(x)$ und einen ungeraden Anteil $U(x)$ gemäß

$$G(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \quad (1a)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x)) \quad (1b)$$

zerlegt werden kann. Es ist unschwer zu erkennen, dass mit dieser Zerlegung

$$G(-x) = G(x) \qquad U(-x) = -U(x)$$

sowie

$$F(x) = G(x) + U(x)$$

gelten. In ähnlicher Weise können die Ströme I_1 und I_2 in einer Doppelleitung (beziehungsweise in einem Klemmenpaar) in einen Gleichtakt- und einen Gegentaktanteil zerlegt werden. Verwendet man

$$I_G = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad (2a)$$

$$I_U = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \quad (2b)$$

dann beschreibt I_G einen Strom, der identisch in beiden Leitern fließt und I_U einen Strom, der in beiden Leitern mit entgegengesetztem Vorzeichen fließt (Abb. 1). Die Gesamtstromverteilung setzt sich offensichtlich aus diesen beiden Anteilen gemäß

$$I_1 = I_G + I_U \quad (3a)$$

$$I_2 = I_G - I_U \quad (3b)$$

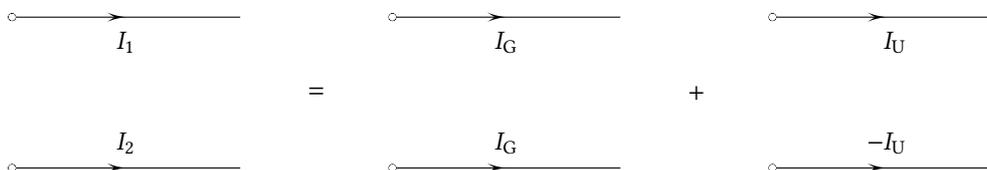


Abb. 1: Zur Zerlegung der Ströme in einer Doppelleitung in Gleichtakt- und Gegentaktanteil

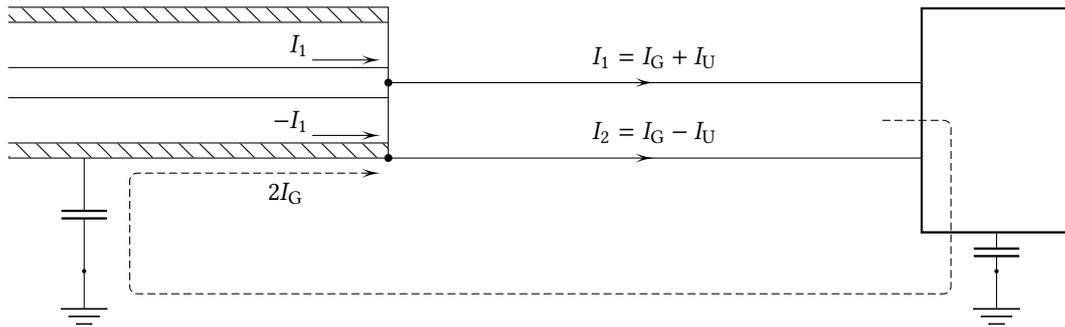


Abb. 2: Zur Anregung von Gleichtaktsignalen beim Übergang von unsymmetrischen auf symmetrische Leitungen

zusammen. Entsprechend ihrer Eigenschaften bezeichnet man den geraden Anteil I_G als *Gleichtaktanteil* (engl. *even mode*, *common mode* oder *unbalanced mode*) und den ungeraden Anteil I_U als *Gegentaktanteil* (engl. *odd mode*, *differential mode* oder *balanced mode*). Ein Klemmenpaar wird nun genau dann als *Tor* bezeichnet, wenn eine reine Gegentaktanregung vorliegt, das heißt wenn die beiden Klemmenströme entgegengesetzt gleich sind. Die darauf aufbauende Mehrorttheorie darf also auch nur dann angewendet werden, wenn dieser Betriebszustand durch die Beschaltung sichergestellt ist.

Insbesondere beim Übergang von unsymmetrischen auf symmetrische Leitungen kommt der Anregung von Gleich- und Gegentaktströmen eine besondere Bedeutung zu. Zur Einhaltung der Torbedingung ist hier darauf zu achten, dass möglichst nur ein Gegentaktsignal angeregt wird, da ein zusätzliches Gleichtaktsignal die Impedanzverhältnisse in undefinierter Weise verändern kann. Als Beispiel für einen solchen Übergang ist in Abb. 2 der direkte Übergang zwischen einer Koaxialleitung (unsymmetrisch) und einer Zweidrahtleitung (symmetrisch) dargestellt. Werden keine Maßnahmen zur Unterdrückung des Gleichtaktstromes I_G getroffen, so kann dieser über die Kapazitäten oder gegebenenfalls auch galvanischen Verbindungen zwischen Verbraucher, Koaxialaußenleiter und Erde fließen. Im Fall der Speisung einer symmetrischen Antenne kann dieser Gleichtaktanteil, der sich in Form einer Mantelwelle zwischen Koaxialkabel und Erde ausbreitet, zu unerwünschten Abstrahlungen und damit zu einer Veränderung der Antennencharakteristik führen. Schaltungselemente oder Strukturen zur Unterdrückung des Gleichtaktstromes bei derartigen Übergängen bezeichnet man als *Balun* (engl. *balanced-unbalanced*).

1.2 Torgrößen

Zur Betrachtung von Mehrortschaltungen in der Hochfrequenztechnik ist es zweckmäßig, die Torspannung U und den Torstrom I zu zerlegen in die Komponenten zweier gegenläufiger Wellen (hinlaufend und rücklaufend), deren Spannung und Strom jeweils gleichphasig und derart orientiert sind, dass sich in Ausbreitungsrichtung der Welle ein Verbraucherzählpfeilsystem ergibt. Der rein reelle Faktor Z_0 zwischen Spannung und Strom jeder Teilwelle ist der Leitungswellenwiderstand Z_0 des zugrundeliegenden Wellenleiters. Durch die Gleichphasigkeit von Spannung und Strom transportiert jede der Teilwellen für sich allein ausschließlich

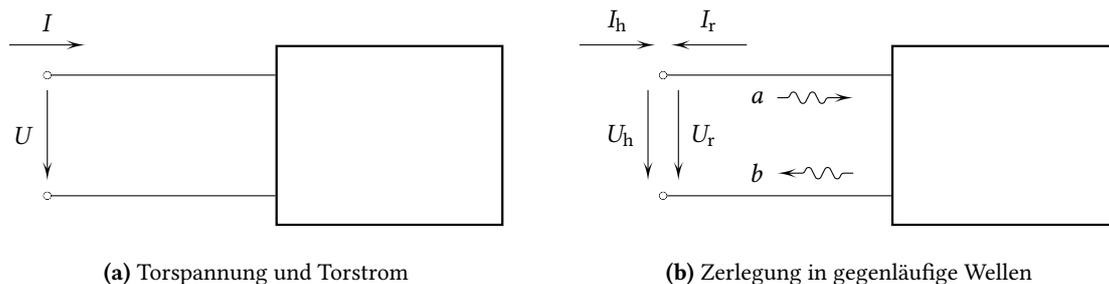


Abb. 3: Zur Zerlegung von Torspannung und Torstrom in zwei gegenläufige Wellen

Wirkleistung, und zwar in Richtung des jeweiligen Verbraucherzählpeilsystems. Die in das Tor hineinlaufende Welle ist beschrieben durch die Spannung U_h und den Strom $I_h = U_h/Z_0$, die aus dem Tor herauslaufende Welle durch die Spannung U_r und den Strom $I_r = U_r/Z_0$ (Abb. 3). Bei gegebenem Z_0 genügt zur Beschreibung jeder Teilwelle eine einzige komplexe Größe U_h oder I_h beziehungsweise U_r oder I_r . Nach dieser Zerlegung und den Zählpeilen wie in Abb. 3b dargestellt ergeben sich die eindeutig umkehrbaren Beziehungen

$$U = U_h + U_r \quad (4a)$$

$$I = I_h - I_r = \frac{U_h}{Z_0} - \frac{U_r}{Z_0} \quad (4b)$$

zwischen dem Wertepaar U und I und dem Wertepaar U_h und U_r . In einem weiteren Schritt werden durch

$$a = \frac{U + IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_h}{\sqrt{Z_0}} = I_h\sqrt{Z_0} \quad (5a)$$

$$b = \frac{U - IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_r}{\sqrt{Z_0}} = I_r\sqrt{Z_0} \quad (5b)$$

die Wellengrößen a und b definiert, welche in normierter Form die hineinlaufende und die herauslaufende Welle beschreiben. Aus den Wellengrößen ergeben sich Torspannung und Torstrom über

$$U = \sqrt{Z_0} \cdot (a + b) \quad (6a)$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \cdot (a - b) \quad (6b)$$

auf eineindeutige Weise. Durch eine Normierung der Torgrößen U und I auf $\sqrt{Z_0}$ ähnlich zu (5) erhält man die normierten Größen

$$u = \frac{U}{\sqrt{Z_0}} = a + b \quad (7a)$$

$$i = I\sqrt{Z_0} = a - b \quad (7b)$$

und in Umkehrung dieser Beziehungen

$$a = \frac{1}{2}(u + i) \quad (8a)$$

$$b = \frac{1}{2}(u - i). \quad (8b)$$

Wir bemerken an dieser Stelle die starke Analogie zur Zerlegung der Leitungsströme in Gleichtakt und Gegentakt (2). Berechnet man die komplexe Scheinleistung S und stellt dabei U und I gemäß (6) durch die Wellengrößen a und b dar, so erhält man

$$S = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}(a + b)(a - b)^* = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + ba^* - b^*a). \quad (9)$$

Der Realteil von S ist die Wirkleistung P_W , also

$$P_W = \operatorname{Re}\{S\} = \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2. \quad (10)$$

Durch Nullsetzen einer der Wellengrößen a oder b wird hier sofort klar, dass die Terme $|a|^2/2$ beziehungsweise $|b|^2/2$ gerade die Wirkleistungen darstellen, welche von der vorlaufenden beziehungsweise der rücklaufenden Welle alleine transportiert werden. Der gesamte Wirkleistungstransport bei Vorliegen beider Wellen ist dann gerade gleich der Differenz der von den Einzelwellen transportierten Wirkleistungen. Die beiden Auffassungen der Wirkleistung als den zeitlichen Mittelwert der Momentanleistung oder als die Differenz der Wirkleistungen zweier gegenläufiger Wellen sind also völlig äquivalent.

2 Charakterisierung von linearen Mehrtores

Zur Charakterisierung der Netzwerkeigenschaften von linearen N -Toren fassen wir die Torgrößen in Spaltenvektoren zusammen und führen den Spannungsvektor $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)^T$, den Stromvektor $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)^T$, den Vektor der hineinlaufenden Wellengrößen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^T$ sowie den Vektor der herauslaufenden Wellengrößen $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$ ein. Der normierte Spannungs- und Stromvektor ergibt sich dann durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (11a)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \quad (11b)$$

Bekanntlich kann ein lineares Mehrtor durch seine Impedanzmatrix \mathbf{Z} beziehungsweise durch seine Admittanzmatrix \mathbf{Y} charakterisiert werden, wobei

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (12a)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad (12b)$$

gilt. Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar auf die normierten Größen übertragen, sodass

$$\mathbf{u} = \mathbf{z}\mathbf{i} \quad (13a)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\mathbf{u} \quad (13b)$$

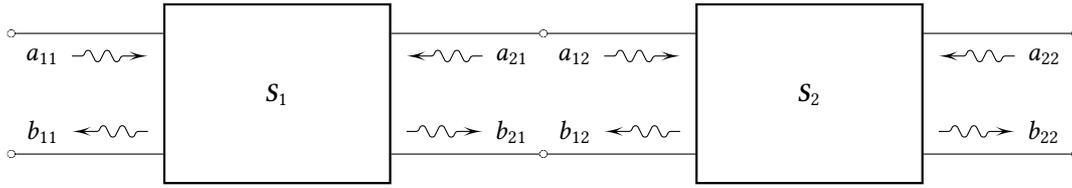


Abb. 4: Zur Kettenschaltung von Zweitoren

mit den normierten Matrizen $z = Z/Z_0$ und $y = Z_0 Y$ gilt. Wegen der linearen Abbildungsbeziehung zwischen Spannung und Strom und den korrespondierenden Wellengrößen besteht ebenfalls eine lineare Beziehung zwischen den Wellengrößen eines linearen Mehrtores, welche beispielsweise in der Form

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (14)$$

mit der Streumatrix \mathbf{S} geschrieben werden kann. Durch Einsetzen bestätigt man leicht, dass die Umrechnung zwischen Impedanz-, Admittanz- und Streumatrix durch

$$\mathbf{z} = (\mathbf{E} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{S}) \quad (15a)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{E} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{S}) \quad (15b)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{z} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}) \quad (15c)$$

$$-\mathbf{S} = (\mathbf{y} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{E}) \quad (15d)$$

mit der $N \times N$ -Einheitsmatrix \mathbf{E} gegeben ist [1]. Da die Streumatrix eines Mehrtores die Amplituden \mathbf{a} der hineinlaufenden Wellen und die Amplituden \mathbf{b} der herauslaufenden Wellen in Beziehung setzt, ergeben sich abhängig von der Energiebilanz eines Mehrtores besondere Eigenschaften seiner Streumatrix. Beispielsweise ist die gesamte von einem Mehrtor absorbierte Leistung

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^H\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}^H\mathbf{b}, \quad (16)$$

woraus sich durch Einsetzen von (14)

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}^H\mathbf{a} - \mathbf{a}^H\mathbf{S}^H\mathbf{S}\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{a}^H(\mathbf{E} - \mathbf{S}^H\mathbf{S})\mathbf{a}, \quad (17)$$

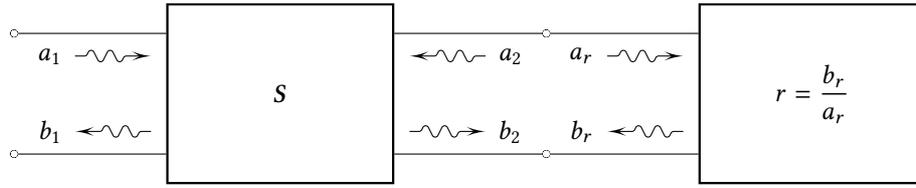
ergibt. Bei einem verlustlosen Mehrtor ist $P_{\text{abs}} = 0$. Damit in (17) $P_{\text{abs}} = 0$ auch dann gilt, wenn der Sonderfall $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ausgenommen ist, muss $\mathbf{E} - \mathbf{S}^H\mathbf{S} = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{S}^H = \mathbf{S}^{-1}$ gelten. Die Streumatrix eines verlustlosen Mehrtores ist also *unitär*.

3 Schaltungen aus linearen Mehrtoren

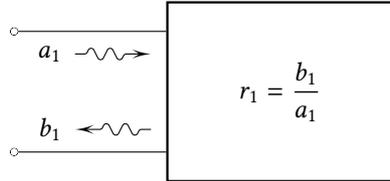
3.1 Kettenschaltung von Zweitoren

Zur Behandlung einer Kettenschaltung von Zweitoren (Abb. 4) geht man zweckmäßig von einer Beschreibung der Zweitore in der Streuform

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$



(a) Sekundärseitiger Abschluss eines Zweitors mit r



(b) Äquivalentes Eintor

Abb. 5: Zur Transformation eines Reflexionsfaktors über ein Zweitor

über zu einer äquivalenten Beschreibung in der Kettenform

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

mit der Kettenmatrix C . Sie kann aus (18) durch Umstellen des Gleichungssystems gewonnen werden und es zeigt sich, dass die wechselseitige Umrechnung zwischen der Streumatrix S und der Kettenmatrix C eines Zweitors durch

$$C = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det S & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{c_{22}} \begin{pmatrix} c_{12} & \det C \\ 1 & -c_{21} \end{pmatrix} \quad (20)$$

erfolgt [1]. Die Behandlung von Kettenschaltungen ist mit der Darstellung (19) deshalb so einfach, weil aufgrund der Verschaltungsbedingung der Vektor auf der rechten Seite einfach durch den Vektor auf der linken Seite des nachfolgenden Zweitors ersetzt werden kann. Abbildung 4 verdeutlicht, dass in einer Kettenschaltung $a_{21} = b_{12}$ und $a_{12} = b_{21}$ gelten und sich daher die Kettenmatrix einer Kettenschaltung von N Zweitoren mit den Kettenmatrizen C_n durch

$$C = \prod_{n=1}^N C_n \quad (21)$$

ergibt.

3.2 Abschluss mit einem Eintor

Durch Abschluss eines Zweitors mit einem Eintor, welches den Reflexionsfaktor r aufweist, wird für die sekundärseitigen Wellengrößen des Zweitors der feste Zusammenhang $rb_2 = a_2$ erzwungen (siehe Abb. 5a). Eine in der Hochfrequenzschaltungstechnik häufige Fragestellung

ist nun, welcher primärseitige Reflexionsfaktor $r_1 = b_1/a_1$ sich durch diese Verschaltung ergibt, das heißt, in welchen Eingangsreflexionsfaktor r_1 der Abschlussreflexionsfaktor r durch das Zweitor transformiert wird. Man erhält das Ergebnis ausgehend von den das Zweitor charakterisierenden Gleichungen

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \quad (22a)$$

$$b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2. \quad (22b)$$

Nach Division von (22a) mit a_1 ergibt sich zunächst

$$\frac{b_1}{a_1} = r_1 = s_{11} + s_{12} \frac{a_2}{a_1}. \quad (23)$$

Durch Multiplikation von (22b) mit r und Verwendung der durch die Beschaltung erzwungenen Identität $rb_2 = a_2$ erhält man

$$a_2 = rb_2 = rs_{21}a_1 + rs_{22}a_2. \quad (24)$$

Dieses Ergebnis kann durch a_1 dividiert und nach dem Verhältnis a_2/a_1 aufgelöst werden, also

$$\frac{a_2}{a_1} = s_{21}r + s_{22}r \frac{a_2}{a_1} \quad (25)$$

und somit

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{rs_{21}}{1 - s_{22}r}. \quad (26)$$

Dieses eingesetzt in (23) ergibt schließlich

$$r_1 = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21} \cdot r}{1 - s_{22} \cdot r} = \frac{s_{11} - \det \mathbf{S} \cdot r}{1 - s_{22} \cdot r}. \quad (27)$$

Für den Fall, dass das transformierende Zweitor sekundärseitig angepasst ist ($s_{22} = 0$) ergibt sich der Sonderfall

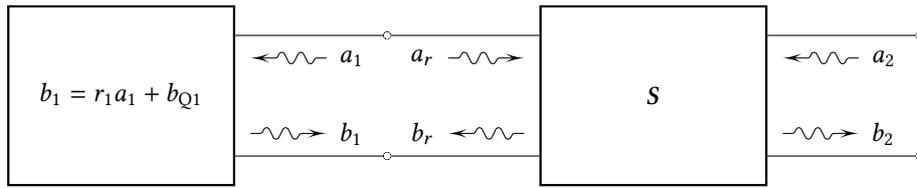
$$r_1 = s_{11} + s_{12}s_{21} \cdot r. \quad (28)$$

Der am Eingang sichtbare Reflexionsfaktor r_1 ergibt sich also in diesem Sonderfall aus der Überlagerung zwischen der durch zweifache Übertragung modifizierte Reflexion $s_{12}s_{21} \cdot r$ und der zusätzlichen Eigenreflexion s_{11} des Zweitors. Mit diesem Ergebnis kann nun das sekundärseitig mit r abgeschlossene Zweitor nach Abb. 5a durch ein äquivalentes Eintor mit dem Reflexionsfaktor r_1 nach Abb. 5b dargestellt werden.

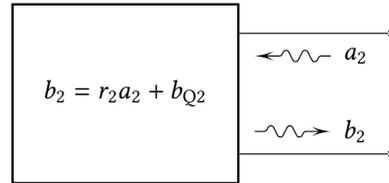
3.3 Ersatzwellenquelle

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten ausschließlich quellenfreie Mehr Tore behandelt wurden, führen wir zunächst die Beschreibung einer 1-Tor-Quelle durch zwei voneinander unabhängige Parameter, den Eigenreflexionsfaktor r_1 und die Quellwelle b_{Q1} ein [1]. Die ablaufende Wellengröße ist dann

$$b_1 = r_1a_1 + b_{Q1}. \quad (29)$$



(a) Transformation einer Quelle über ein Zweitor



(b) Ersatzwellenquelle

Abb. 6: Zur Einführung einer Ersatzwellenquelle

Diese Beschreibung ist völlig äquivalent zur Beschreibung als Spannungs- oder Stromquelle mit Innenwiderstand. Beispielsweise erhält man mit (8) die Widerstandsform

$$u_1 = z_1 i_1 + u_{Q1} \quad (30)$$

wobei

$$z_1 = \frac{1 + r_1}{1 - r_1} \quad \text{und} \quad (31a)$$

$$u_{Q1} = \frac{2b_{Q1}}{1 - r_1} \quad (31b)$$

oder die Leitwertform

$$i_1 = y_1 u_1 + i_{Q1} \quad (32)$$

wobei

$$y_1 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1} \quad \text{und} \quad (33a)$$

$$i_{Q1} = \frac{-2b_{Q1}}{1 + r_1} \quad (33b)$$

Wird eine solche 1-Tor-Quelle entsprechend Abb. 6 mit einem quellenlosen Zweitor in Kette geschaltet, so tritt am Ausgang des Zweitors ebenfalls eine Quellwelle auf. Die Gesamtanordnung kann als neue 1-Tor-Quelle mit der ablaufenden Wellengröße

$$b_2 = r_2 a_2 + b_{Q2} \quad (34)$$

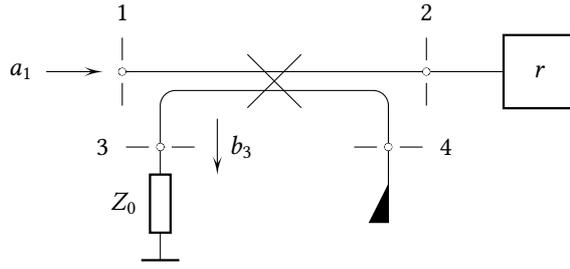


Abb. 7: Reflektometerschaltung mit einem Richtkoppler

und den transformierten Parametern

$$r_2 = s_{22} + \frac{s_{21}s_{12}r_1}{1 - s_{11}r_1} \quad \text{und} \quad (35a)$$

$$b_{Q2} = \frac{s_{21}}{1 - s_{11}r_1} b_{Q1} \quad (35b)$$

verstanden werden [1].

3.4 Reflektometerschaltung

Als weiteres Beispiel analysieren wir die in Abb. 7 gezeigte Reflektometerschaltung. In dieser Darstellung verzichten wir nun der Übersichtlichkeit wegen auf die explizite Darstellung einer Doppelleitung, nicht zuletzt auch wegen der Übertragbarkeit des gezeigten Formalismus auf Nicht-TEM-Leitungen. Die Reflektometerschaltung stellt unter anderem eine Grundschialtung in der Messtechnik zur Messung von Reflexionsfaktoren dar. Ein Richtkoppler koppelt dabei die von einem Messobjekt reflektierte Welle aus der Testsignalleitung aus und führt sie einem Empfänger zu, dessen Eingangsimpedanz in Abb. 7 durch Z_0 repräsentiert wird. Wir gehen von einem 4-Tor-Koppler aus, der durch die Gleichungen

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 + s_{14}a_4 \quad (36a)$$

$$b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + s_{23}a_3 + s_{24}a_4 \quad (36b)$$

$$b_3 = s_{31}a_1 + s_{32}a_2 + s_{33}a_3 + s_{34}a_4 \quad (36c)$$

$$b_4 = s_{41}a_1 + s_{42}a_2 + s_{43}a_3 + s_{44}a_4 \quad (36d)$$

mit den Streuparametern $s_{\mu\nu}$ charakterisiert wird. Wir nehmen vereinfachend an, dass das unbenutzte Tor 4 reflexionsfrei durch einen idealen Wellensumpf abgeschlossen sei. Ferner soll der Empfänger ebenfalls als reflexionsfrei angenommen werden. In diesem Fall hängt der Übertragungsfaktor b_3/a_1 von Tor 1 zu Tor 3 nur vom Reflexionsfaktor r und den Streuparametern des Richtkopplers ab, nicht jedoch von der Beschaltung an den Toren 3 und 4. Mit den gemachten Annahmen gilt $a_3 = a_4 = 0$. Gesucht sei nun der Übertragungsfaktor b_3/a_1 von Tor 1 zu Tor 3. Die an Tor 4 ablaufende Welle b_4 wird im Wellensumpf absorbiert und sei unerheblich.

Damit verbleiben von (36) die drei verkürzten Gleichungen

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \quad (37a)$$

$$b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 \quad (37b)$$

$$b_3 = s_{31}a_1 + s_{32}a_2. \quad (37c)$$

Da der Wert von b_3/a_1 gesucht ist, dividieren wir (37c) durch a_1 und erhalten

$$\frac{b_3}{a_1} = s_{31} + s_{32} \frac{a_2}{a_1}. \quad (38)$$

Wie in Abschnitt 3.2 kann (37b) mit der Beschaltung $a_2 = rb_2$ umgeformt werden zu

$$a_2 = rb_2 = rs_{21}a_1 + rs_{22}a_2 \quad (39)$$

und nach Division mit a_1 nach dem Verhältnis

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{rs_{21}}{1 - s_{22}r}. \quad (40)$$

aufgelöst werden. Einsetzen in (38) ergibt schließlich die gesuchte Lösung

$$\frac{b_3}{a_1} = s_{31} + \frac{s_{21}s_{32}r}{1 - s_{22}r}. \quad (41)$$

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

| Symbol | Einheit | Bedeutung |
|----------|------------|---|
| $F(x)$ | 1 | beliebige Funktion von x |
| $G(x)$ | 1 | gerader Anteil von $F(x)$ |
| I | A | Strom |
| P_B | W | Blindleistung |
| P_W | W | Wirkleistung |
| S | W | komplexe Scheinleistung |
| U | V | Spannung |
| $U(x)$ | 1 | ungerader Anteil von $F(x)$ |
| Z_0 | Ω | Wellenwiderstand |
| a | \sqrt{W} | Wellengröße der vorlaufenden Welle |
| b | \sqrt{W} | Wellengröße der rücklaufenden (reflektierten) Welle |
| c_0 | m/s | Lichtgeschwindigkeit im Vakuum |
| c_{ij} | 1 | Elemente der Kettenmatrix |
| f | 1/s | Frequenz |
| r | 1 | Reflexionsfaktor |
| s_{ij} | 1 | Elemente der Streumatrix |
| t | s | Zeit |

– Matrizen und Vektorgrößen –

| | | |
|-------|------------|---------------------------------------|
| A^H | | hermitesch Transponierte von A |
| C | 1 | Kettenmatrix |
| E | 1 | Einheitsmatrix |
| S | 1 | Streumatrix |
| Y | S | Admittanzmatrix |
| Z | Ω | Impedanzmatrix |
| a | \sqrt{W} | Vektor der vorlaufenden Wellengrößen |
| b | \sqrt{W} | Vektor der rücklaufenden Wellengrößen |
| i | \sqrt{W} | Vektor der normierten Torströme |
| u | \sqrt{W} | Vektor der normierten Torspannungen |
| y | 1 | normierte Admittanzmatrix |
| z | 1 | normierte Impedanzmatrix |

– Zahlen –

| | | |
|-------|---|---|
| e | 1 | Eulersche Zahl $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ |
| j | 1 | imaginäre Einheit ($j^2 = -1$) |
| π | 1 | Ludolfsche Zahl |

Literatur

- [1] H. Brand: *Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze*. Stuttgart: Hirzel-Verlag, 1970.
- [2] H. J. Carlin: "The Scattering Matrix in Network Theory". In: *IRE Trans. Circuit Theory* (June 1956), pp. 88–97.
- [3] R. E. Collin: *Foundations for Microwave Engineering*. 2nd ed. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2001.
- [4] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [5] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, July 2, 2014. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/> (visited on 07/03/2014).
- [6] H. W. Schüßler: *Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke*. 2. Aufl. Bd. 1. Netzwerke, Signale und Systeme. Berlin: Springer, 1990.
- [7] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 1*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 6. Aufl. Berlin: Springer, 2000.
- [8] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 2*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1999.