Rauschen von linearen Zweitoren*

http://www.siart.de/lehre/noise.pdf

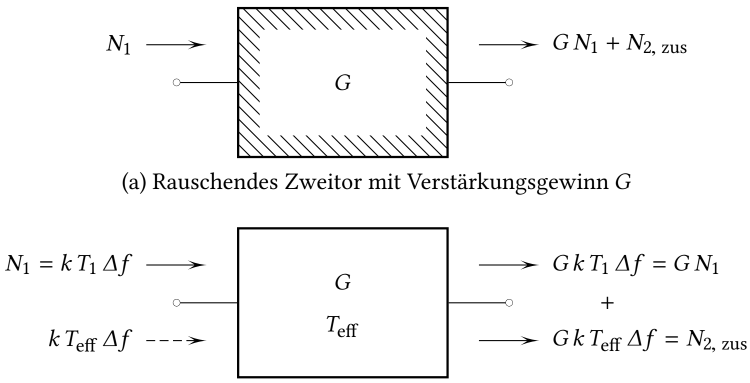
Uwe Siart
tutorien@siart.de

3. August 2016 (Version 1.92)

1 Effektive Rauschtemperatur

Zur Definition der effektiven Rauschtemperatur eines Zweitors wird die gesamte Ausgangsrauschleistung N_2 aufgespalten in die vom Eingang übertragene und um den Faktor G verstärkte Eingangsrauschleistung N_1 und in die zusätzliche Rauschleistung $N_{2,\,\mathrm{zus}}$, die von inneren Rauschquellen des Zweitors erzeugt wird und zusätzlich zum verstärkten Eingangsrauschen GN_1 am Ausgang auftritt. Wird das Zweitor als rauschfrei angenommen, dann kann man sich $N_{2,\,\mathrm{zus}}$ auch durch eine zusätzliche Rauschquelle am Eingang verursacht denken, die mit der Temperatur T_{eff} rauscht (Abb. 1). Mit der Boltzmann-Konstante

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$



(a) Rauschendes Zweitor mit Verstärkungsgewinn G

(b) Äquivalentes rauschfreies Zweitor mit zusätzlicher Rauschquelle am Eingang

Abb. 1: Zur Definition der effektiven Rauschtemperatur

*Dieser Aufsatz ist ein Auszug aus: Detlefsen, J.; Siart, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik.* 4. Auflage. München: Oldenbourg, 2012.

und der Bandbreite Δf ist die Rauschleistung am Ausgang

$$N_2 = G\,N_1 + N_{2,\,\mathrm{zus}} = G\,k\,T_1\,\Delta f + G\,k\,T_{\mathrm{eff}}\,\Delta f = k\,T_2\,\Delta f \ . \tag{1}$$

Die so eingeführte *effektive Rauschtemperatur* T_{eff} beschreibt das zusätzliche Rauschen, welches von dem rauschenden Zweitor hinzugefügt wird. Sie ist damit eine eindeutige Kenngröße zur Beschreibung der Rauscheigenschaften eines Zweitors. Bei gegebener Rauschtemperatur T_1 des Generators ergibt sich die Rauschtemperatur T_2 am Ausgang des Zweitors zu

$$\boxed{T_2 = G\,(T_1 + T_{\mathrm{eff}}) \ .} \tag{2}$$

2 Rauschzahl

Die *Rauschzahl* F eines Zweitors ist der Faktor, um den der Signal-Rausch-Abstand S/N (bei fester Bandbreite Δf) durch das Zweitor vermindert wird. Mit $S_1/S_2 = 1/G$ ergibt sich

$$F = \left.\frac{S_1/N_1}{S_2/N_2}\right|_{\Delta f} = \frac{N_2}{G\,N_1} = \frac{G\,N_1 + N_{2,\,\mathrm{zus}}}{G\,N_1} = 1 + \frac{N_{2,\,\mathrm{zus}}}{G\,N_1} = 1 + F_{\mathrm{Z}} \ . \tag{3}$$

Mit dieser einfachen Rechnung wird auch sofort klar, dass die beiden gängigen Definitionen der Rauschzahl

$$F = \frac{S_1/N_1}{S_2/N_2} = \frac{\text{Signal-Rausch-Abstand am Eingang}}{\text{Signal-Rausch-Abstand am Ausgang}}$$

und

$$F = \frac{G\,N_1 + N_{2,\,\mathrm{zus}}}{G\,N_1} = \frac{\text{Ausgangsrauschleistung des rauschenden Zweitors}}{\text{Ausgangsrauschleistung des rauschfreien Zweitors}}$$

völlig äquivalent sind. Die Größe $F_{\mathrm{Z}} = F - 1 = N_{2,\,\mathrm{zus}}/(GN_1)$ nennt man die *zusätzliche Rauschzahl* des Zweitors. Unter Verwendung der Rauschtemperaturen T_1 und T_{eff} ergibt sich die Rauschzahl zu

$$F = \frac{N_2}{G\,N_1} = \frac{G\,k\,T_1\,\Delta f + G\,k\,T_{\mathrm{eff}}\,\Delta f}{G\,k\,T_1\,\Delta f} = 1 + \frac{T_{\mathrm{eff}}}{T_1} = 1 + F_{\mathrm{Z}} \tag{4}$$

mit der Eingangsrauschtemperatur T_1 als Bezugstemperatur. Aus (3) und (4) ergibt sich für die zusätzliche Rauschzahl

$$\boxed{F_{\mathrm{Z}} = F - 1 = \frac{N_{2,\,\mathrm{zus}}}{G\,N_1} = \frac{T_{\mathrm{eff}}}{T_1} \ .} \tag{5}$$

Die Rauschzahl hängt offenbar von der Eingangsrauschleistung N_1 beziehungsweise von der Generatorrauschtemperatur T_1 ab. Anhand der Definition (3) der Rauschzahl wird dies auch anschaulich klar, denn die zusätzliche Rauschleistung $N_{2,\,\mathrm{zus}}$ fällt umso mehr ins Gewicht, je kleiner GN_1 ist. Je kleiner die Eingangsrauschtemperatur, desto größer die Rauschzahl des selben Zweitores. Die Rauschzahl ist also alleine keine hinreichende Beschreibungsgröße für ein rauschendes Zweitor. Die Angabe der Rauschzahl F erfordert auch die Angabe der zugehörigen Eingangsrauschleistung N_1 oder der Generatorrauschtemperatur T_1 als *Bezugstemperatur.*

Üblicherweise wird die Temperatur $T_0 = 290\,\mathrm{K}$ als Bezugstemperatur gewählt. Die zugehörige Rauschzahl heißt *Standard-Rauschzahl* F_0. Falls eine andere Eingangsrauschtemperatur als T_0 vorliegt (etwa $T_1 \neq T_0$), so ist F_0 auf diese andere Bezugstemperatur umzurechnen. Aus (4) folgt

$$T_{\mathrm{eff}} = T_0(F_0 - 1) = T_1 \left(F\Big|_{T_1} - 1 \right) \tag{6}$$

und hieraus die Formel

$$F\Big|_{T_1} = \frac{T_0}{T_1}(F_0 - 1) + 1 \tag{7}$$

zur Umrechnung von F_0 auf eine andere Bezugstemperatur T_1, welche bei Verwendung der zusätzlichen Rauschzahl F_Z die einfachere Form

$$\boxed{F_\mathrm{Z}\Big|_{T_1} = \frac{T_0}{T_1} \cdot F_\mathrm{Z}\Big|_{T_0}} \tag{8}$$

annimmt. Aus (2) und (5) folgt außerdem für die Ausgangsrauschtemperatur

$$T_2 = G\,T_1(1 + F_\mathrm{Z}) \tag{9}$$

und damit die Darstellung

$$N_2 = k\,\Delta f\,T_2 = k\,\Delta f\,G\,T_1 + k\,\Delta f\,G\,T_1\,F_\mathrm{Z} = G\,N_1 + N_{2,\,\mathrm{zus}} \tag{10}$$

für die verfügbare Ausgangsrauschleistung. Wird also die aufgrund innerer Rauschquellen zusätzlich verfügbare Rauschleistung $N_{2,\,\mathrm{zus}}$ durch Rauschquellen am Eingang des Zweitors modelliert, dann haben diese Quellen eine verfügbare Rauschleistung von

$$\boxed{P_\mathrm{RV} = k \cdot \Delta f \cdot T_1 \cdot F_\mathrm{Z}\,,} \tag{11}$$

wobei die zusätzliche Rauschzahl F_Z bezogen auf T_1 einzusetzen ist.

3 Kettenrauschzahl

Bei der Berechnung der jeweiligen Rauschleistung an den Ausgängen einer Kettenanordnung von Zweitoren ist die effektive Rauschtemperatur eine hilfreiche Größe. Zur Erläuterung betrachten wir eine Kettenschaltung aus zwei rauschenden Zweitoren. Die Zweitore sind beschrieben durch ihre Verstärkungen G_1 und G_2 und durch ihre Rauschzahlen F_1 und F_2, die bei der Bezugstemperatur T_0 gegeben sind. Nach (5) können die zugehörigen effektiven Rauschtemperaturen $T_{\text{eff},1}$ und $T_{\text{eff},2}$ mit

$$\boxed{T_{\text{eff}} = T_0 \cdot (F-1) = T_0 \cdot F_{\text{Z}}} \tag{12}$$

berechnet werden. Durch fortgesetzte Anwendung von (2) und unter der Voraussetzung, dass alle Tore angepasst sind, ergeben sich die Rauschtemperaturen T_2 und T_3 zu

$$T_2 = G_1 \cdot (T_1 + T_{\text{eff},1}) \tag{13a}$$

$$T_3 = G_2 \cdot \big(G_1 \cdot (T_1 + T_{\text{eff},1}) + T_{\text{eff},2}\big) \; . \tag{13b}$$

Diese Vorgehensweise kann auf die Kettenschaltung von n Zweitoren ausgedehnt werden und wir erhalten die Rauschtemperatur T_{n+1} nach dem n-ten Glied zu

$$T_{n+1} = G_n \Bigg(\cdots G_3 \Big(G_2 \big(G_1 (T_1 + T_{\text{eff},1}) + T_{\text{eff},2} \big) + T_{\text{eff},3} \Big) \cdots + T_{\text{eff},\,n} \Bigg) \tag{14}$$

und hiermit die Rauschleistung

$$N_{n+1} = k\, T_{n+1}\, \Delta f \; . \tag{15}$$

Mit der Gesamtverstärkung $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$ erhält man durch sinngemäße Anwendung von (2) die Rauschtemperatur T_{n+1} am Ausgang zu

$$T_{n+1} = G(T_1 + T_{\text{eff, ges}}) = G(T_1 + T_0 \cdot F_{\text{Z,ges}}) = G\, T_{\text{S}} \; , \tag{16}$$

mit der sogenannten *Systemrauschtemperatur*

$$\boxed{T_{\text{S}} = T_1 + T_0 \cdot F_{\text{Z,ges}}} \tag{17}$$

und der zusätzlichen Rauschzahl der gesamten Zweitorkette

$$F_{\text{Z,ges}} = \frac{T_{n+1} - G\, T_1}{G\, T_0} \; . \tag{18}$$

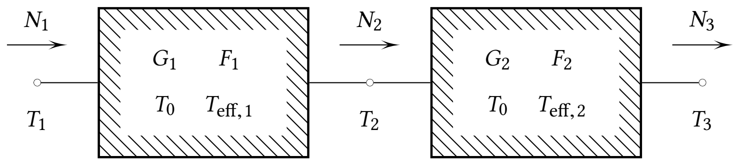


Abb. 2: Zur Herleitung der Kettenrauschzahl

Mit (18) und durch Einsetzen aller effektiven Rauschtemperaturen nach (12) in (14) ergibt sich unter der Voraussetzung, dass alle Rauschzahlen auf die gleiche Temperatur T_0 bezogen sind, die *zusätzliche Rauschzahl der Kettenschaltung* zu

$$\boxed{F_{\mathrm{Z,ges}} = F_{\mathrm{Z},1} + \frac{F_{\mathrm{Z},2}}{G_1} + \frac{F_{\mathrm{Z},3}}{G_1\,G_2} + \cdots + \frac{F_{\mathrm{Z},n}}{G_1\,G_2\cdots G_{n-1}}\ .} \tag{19}$$

Wenn die Einzelverstärkungen also nicht zu klein sind ($G_\nu > 10$), dann wird die Rauschzahl der gesamten Kette im Wesentlichen von der Rauschzahl des ersten Gliedes bestimmt.

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
F	1	Rauschzahl
F_0	1	Standard-Rauschzahl
F_Z	1	zusätzliche Rauschzahl
G	1	Verstärkung, Gewinn
N	W	Rauschleistung
N_1	W	Eingangsrauschleistung
N_2	W	Ausgangsrauschleistung
$N_{2,\mathrm{zus}}$	W	zusätzliche Ausgangsrauschleistung
S	W	Signalleistung
S_1	W	Eingangssignalleistung
S_2	W	Ausgangssignalleistung
T	K	(Rausch-)Temperatur
T_0	K	Bezugstemperatur
T_S	K	Systemrauschtemperatur
T_eff	K	effektive Rauschtemperatur
Δf	1/s	Bandbreite
f	1/s	Frequenz
k	J/K	Boltzmann-Konstante

Literatur

[1] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.

[2] H. Meinke und F. W. Gundlach: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*. Hrsg. von K. Lange und K.-H. Löcherer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1992.

[3] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University: August 1, 2016. URL: http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/ (visited on 08/02/2016).

[4] P. Russer: *Hochfrequenztechnik 3*. 1. Aufl. Skriptum zur Vorlesung. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Technische Universität München, 1989.

[5] B. Schiek und H.-J. Siweris: *Rauschen in Hochfrequenzschaltungen*. Heidelberg: Hüthig, 1990.

[6] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 2*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1999.