

# Rauschen von linearen Zweitoren\*

<http://www.siart.de/lehre/noise.pdf>

Uwe Siart  
tutorien@siart.de

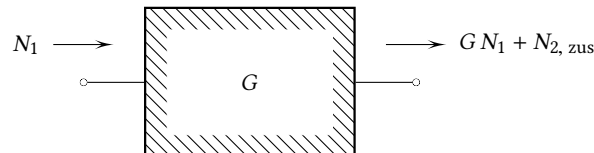
19. August 2017 (Version 1.93)

## Zusammenfassung

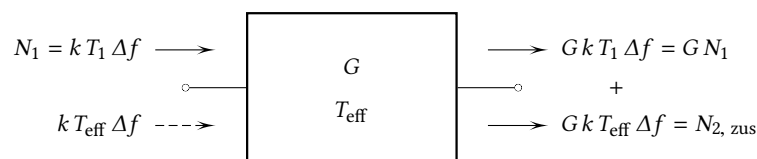
Dieser Aufsatz erläutert die Bedeutung der Rauschzahl und der effektiven Rauschtemperatur zur Charakterisierung der Rauscheigenschaften von Zweitoren. Die neueste Version ist unter dem URL <http://www.siart.de/lehre/noise.pdf> erhältlich.

## 1 Effektive Rauschtemperatur

Zur Definition der effektiven Rauschtemperatur eines Zweitors wird die gesamte Ausgangsrauschleistung  $N_2$  aufgespalten in die vom Eingang übertragene und um den Faktor  $G$  verstärkte Eingangsrauschleistung  $N_1$  und in die zusätzliche Rauschleistung  $N_{2, \text{zus}}$ , die von inneren Rauschquellen des Zweitors erzeugt wird und zusätzlich zum verstärkten Eingangsrauschen  $GN_1$  am Ausgang auftritt. Wird das Zweitor als rauschfrei angenommen, dann kann man sich



(a) Rauschendes Zweitor mit Übertragungsgewinn  $G$



(b) Äquivalentes rauschfreies Zweitor mit zusätzlicher Rauschquelle am Eingang

**Abb. 1:** Zur Definition der effektiven Rauschtemperatur

\*Dieser Aufsatz ist ein Auszug aus: Detlefsen, J.; Siart, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Auflage. München: Oldenbourg, 2012.

$N_{2, \text{zus}}$  auch durch eine zusätzliche Rauschquelle am Eingang verursacht denken, die mit der Temperatur  $T_{\text{eff}}$  rauscht (Abb. 1). Mit der Boltzmann-Konstante

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

und der Bandbreite  $\Delta f$  ist die Rauschleistung am Ausgang

$$N_2 = G N_1 + N_{2, \text{zus}} = G k T_1 \Delta f + G k T_{\text{eff}} \Delta f = k T_2 \Delta f . \quad (1)$$

Die so eingeführte *effektive Rauschtemperatur*  $T_{\text{eff}}$  beschreibt das zusätzliche Rauschen, welches von den inneren Rauschquellen des rauschenden Zweitores ausgeht und dem Signalpfad hinzugefügt wird. Sie ist damit eine spezifische Kenngröße zur Beschreibung der Rauscheigenschaften eines Zweitores. Bei gegebener Rauschtemperatur  $T_1$  des Generators ergibt sich nach (1) die Rauschtemperatur  $T_2$  am Ausgang des Zweitors zu

$$T_2 = G (T_1 + T_{\text{eff}}) . \quad (2)$$

## 2 Rauschzahl

Die *Rauschzahl*  $F$  eines Zweitors ist der Faktor, um den der Signal-Rausch-Abstand  $S/N$  (bei fester Bandbreite  $\Delta f$ ) durch das zusätzliche Rauschen des Zweitors vermindert wird. Mit  $S_1/S_2 = 1/G$  ergibt sich

$$F = \frac{S_1/N_1}{S_2/N_2} \Big|_{\Delta f} = \frac{N_2}{G N_1} = \frac{G N_1 + N_{2, \text{zus}}}{G N_1} = 1 + \frac{N_{2, \text{zus}}}{G N_1} = 1 + F_Z . \quad (3)$$

Mit dieser einfachen Rechnung wird auch sofort klar, dass die beiden geläufigen Definitionen der Rauschzahl

$$F = \frac{S_1/N_1}{S_2/N_2} = \frac{\text{Signal-Rausch-Abstand am Eingang}}{\text{Signal-Rausch-Abstand am Ausgang}}$$

und

$$F = \frac{G N_1 + N_{2, \text{zus}}}{G N_1} = \frac{\text{Ausgangsrauschleistung des rauschenden Zweitors}}{\text{Ausgangsrauschleistung des rauschfreien Zweitors}}$$

völlig äquivalent sind. Die Größe  $F_Z = F - 1 = N_{2, \text{zus}}/(G N_1)$  nennt man die *zusätzliche Rauschzahl* des Zweitors. Unter Verwendung der Rauschtemperaturen  $T_1$  und  $T_{\text{eff}}$  ergibt sich die Rauschzahl zu

$$F = \frac{N_2}{G N_1} = \frac{G k T_1 \Delta f + G k T_{\text{eff}} \Delta f}{G k T_1 \Delta f} = 1 + \frac{T_{\text{eff}}}{T_1} = 1 + F_Z \quad (4)$$

mit der Eingangsrauschtemperatur  $T_1$  als Bezugstemperatur. Aus (3) und (4) ergibt sich für die zusätzliche Rauschzahl

$$F_Z = F - 1 = \frac{N_{2, \text{zus}}}{G N_1} = \frac{T_{\text{eff}}}{T_1} . \quad (5)$$

Die Rauschzahl hängt offenbar von der Eingangsrauschleistung  $N_1$  beziehungsweise von der Generatorrauschtemperatur  $T_1$  ab. Anhand der Definition (3) der Rauschzahl wird dies auch anschaulich klar, denn die zusätzliche Rauschleistung  $N_{2, \text{zus}}$  fällt umso mehr ins Gewicht, je kleiner  $GN_1$  ist. Je kleiner die Eingangsrauschtemperatur, desto größer die Rauschzahl des selben Zweitores. Die Rauschzahl ist also alleine keine hinreichende Beschreibungsgröße für ein rauschendes Zweitor. Die Angabe der Rauschzahl  $F$  erfordert auch die Angabe der zugehörigen Eingangsrauschleistung  $N_1$  oder der Generatorrauschtemperatur  $T_1$  als *Bezugstemperatur*.

Üblicherweise wird jedoch (sozusagen stillschweigend) die Temperatur  $T_0 = 290 \text{ K}$  als Bezugstemperatur gewählt. Die zugehörige Rauschzahl heißt *Standard-Rauschzahl*  $F_0$ . Falls eine andere Eingangsrauschtemperatur als  $T_0$  vorliegt (etwa  $T_1 \neq T_0$ ), so ist  $F_0$  auf diese andere Bezugstemperatur umzurechnen. Aus (4) folgt

$$T_{\text{eff}} = T_0(F_0 - 1) = T_1 \left( F \Big|_{T_1} - 1 \right) \quad (6)$$

und hieraus die Formel

$$F \Big|_{T_1} = \frac{T_0}{T_1}(F_0 - 1) + 1 \quad (7)$$

zur Umrechnung von  $F_0$  auf eine andere Bezugstemperatur  $T_1$ , welche bei Verwendung der zusätzlichen Rauschzahl  $F_Z$  die einfachere Form

$$\boxed{F_Z \Big|_{T_1} = \frac{T_0}{T_1} \cdot F_Z \Big|_{T_0}} \quad (8)$$

annimmt. Aus (2) und (5) folgt außerdem für die Ausgangsrauschtemperatur

$$T_2 = G T_1(1 + F_Z) \quad (9)$$

und damit die Darstellung

$$N_2 = k \Delta f T_2 = k \Delta f G T_1 + k \Delta f G T_1 F_Z = G N_1 + N_{2, \text{zus}} \quad (10)$$

für die verfügbare Ausgangsrauschleistung. Wird also die aufgrund innerer Rauschquellen zusätzlich verfügbare Rauschleistung  $N_{2, \text{zus}}$  durch Rauschquellen am Eingang des Zweitores modelliert, dann haben diese Quellen eine verfügbare Rauschleistung von

$$\boxed{P_{\text{RV}} = k \cdot \Delta f \cdot T_1 \cdot F_Z,} \quad (11)$$

wobei die zusätzliche Rauschzahl  $F_Z$  bezogen auf  $T_1$  einzusetzen ist. Die zusätzliche Rauschzahl ist also der Faktor, um den die Rauschtemperatur der äquivalenten Rauschquellen höher ist, als die Bezugstemperatur.

### 3 Kettenrauschzahl

Bei der Berechnung der jeweiligen Rauschleistung an den Ausgängen einer Kettenanordnung von Zweitoren ist die effektive Rauschtemperatur eine hilfreiche Größe. Zur Erläuterung betrachten wir eine Kettenschaltung aus zwei rauschenden Zweitoren. Die Zweitore sind beschrieben durch ihre Verstärkungen  $G_1$  und  $G_2$  und durch ihre Rauschzahlen  $F_1$  und  $F_2$ , die bei der Bezugstemperatur  $T_0$  gegeben sind. Nach (5) können die zugehörigen effektiven Rauschtemperaturen  $T_{\text{eff},1}$  und  $T_{\text{eff},2}$  mit

$$T_{\text{eff}} = T_0 \cdot (F - 1) = T_0 \cdot F_Z \quad (12)$$

berechnet werden. Durch fortgesetzte Anwendung von (2) und unter der Voraussetzung, dass alle Tore angepasst sind, ergeben sich die Rauschtemperaturen  $T_2$  und  $T_3$  zu

$$T_2 = G_1 \cdot (T_1 + T_{\text{eff},1}) \quad (13a)$$

$$T_3 = G_2 \cdot (G_1 \cdot (T_1 + T_{\text{eff},1}) + T_{\text{eff},2}) . \quad (13b)$$

Diese Vorgehensweise kann auf die Kettenschaltung von  $n$  Zweitoren ausgedehnt werden und wir erhalten die Rauschtemperatur  $T_{n+1}$  nach dem  $n$ -ten Glied zu

$$T_{n+1} = G_n \left( \dots G_3 \left( G_2 \left( G_1 (T_1 + T_{\text{eff},1}) + T_{\text{eff},2} \right) + T_{\text{eff},3} \right) \dots + T_{\text{eff},n} \right) \quad (14)$$

und hiermit die Rauschleistung

$$N_{n+1} = k T_{n+1} \Delta f . \quad (15)$$

Mit der Gesamtverstärkung  $G = G_1 \cdot \dots \cdot G_n$  erhält man durch sinngemäße Anwendung von (2) die Rauschtemperatur  $T_{n+1}$  am Ausgang zu

$$T_{n+1} = G(T_1 + T_{\text{eff, ges}}) = G(T_1 + T_0 \cdot F_{Z, \text{ges}}) = G T_S , \quad (16)$$

mit der sogenannten *Systemrauschtemperatur*

$$T_S = T_1 + T_0 \cdot F_{Z, \text{ges}} \quad (17)$$

und der zusätzlichen Rauschzahl der gesamten Zweitorkette

$$F_{Z, \text{ges}} = \frac{T_{n+1} - G T_1}{G T_0} . \quad (18)$$

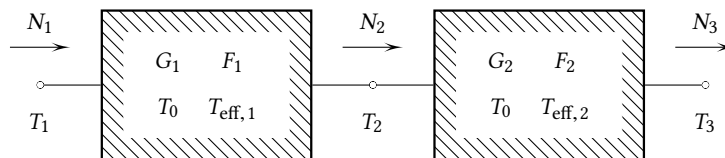


Abb. 2: Zur Herleitung der Kettenrauschzahl

Mit (18) und durch Einsetzen aller effektiven Rauschtemperaturen nach (12) in (14) ergibt sich unter der Voraussetzung, dass alle Rauschzahlen auf die gleiche Temperatur  $T_0$  bezogen sind, die *zusätzliche Rauschzahl der Kettenschaltung* zu

$$F_{Z,\text{ges}} = F_{Z,1} + \frac{F_{Z,2}}{G_1} + \frac{F_{Z,3}}{G_1 G_2} + \cdots + \frac{F_{Z,n}}{G_1 G_2 \cdots G_{n-1}} . \quad (19)$$

Wenn die Einzelverstärkungen also nicht zu klein sind ( $G_v > 10$ ), dann wird die Rauschzahl der gesamten Kette im Wesentlichen von der Rauschzahl des ersten Gliedes bestimmt. Hieraus resultiert die allgemein bekannte Richtlinie, dass in einer Kette aus mehreren Verstärkern der Verstärker mit der kleinsten Rauschzahl an den Anfang der Kette zu setzen ist.

### Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
$F$	1	Rauschzahl
$F_0$	1	Standard-Rauschzahl
$F_Z$	1	zusätzliche Rauschzahl
$G$	1	Verstärkung, Gewinn
$N$	W	Rauschleistung
$N_1$	W	Eingangsrauschleistung
$N_2$	W	Ausgangsrauschleistung
$N_{2,\text{zus}}$	W	zusätzliche Ausgangsrauschleistung
$S$	W	Signalleistung
$S_1$	W	Eingangssignalleistung
$S_2$	W	Ausgangssignalleistung
$T$	K	(Rausch-)Temperatur
$T_0$	K	Bezugstemperatur
$T_S$	K	Systemrauschtemperatur
$T_{\text{eff}}$	K	effektive Rauschtemperatur
$\Delta f$	1/s	Bandbreite
$f$	1/s	Frequenz
$k$	J/K	Boltzmann-Konstante

## Literatur

- [1] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [2] H. Meinke und F. W. Gundlach: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*. Hrsg. von K. Lange und K.-H. Löcherer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1992.
- [3] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University: August 1, 2016. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/> (visited on 08/02/2016).
- [4] P. Russer: *Hochfrequenztechnik 3*. 1. Aufl. Skriptum zur Vorlesung. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Technische Universität München, 1989.
- [5] B. Schiek und H.-J. Siweris: *Rauschen in Hochfrequenzschaltungen*. Heidelberg: Hüthig, 1990.
- [6] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 2*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1999.