– Tutorium –

Hochauflösende Spektralschätzung und Prädiktionsverfahren

URL: *http://www.siart.de/lehre/spektralschaetzung.pdf*

Uwe Siart
tutorien@siart.de

28. Januar 2013 (Version 1.24)

Inhaltsverzeichnis

1 Parameterschätzung **4**

2 Klassische Spektralschätzung **6**

2.1 Autokorrelationsfolge (AKF) 6
2.2 Korrelogramm 8
2.3 Fensterung der AKF (Blackman-Tukey) 9
2.4 Periodogramm (auch: direkte Methode) 10
2.5 Mittelung von Periodogrammen (Bartlett) 11
2.6 Mittelung von Periodogrammen mit Fensterung und Überlappung (Welch) . . 12
2.7 Kombination Periodogramm-Korrelogramm 13
2.8 Maximum-Entropy-Spektrum 14

3 Hochauflösende Schätzverfahren (parametrisch) **15**

3.1 Direkte Strukturen diskreter Filter 15
3.2 Strukturen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen 17
3.3 Übertragungsfunktionen und Differenzengleichungen 19
3.4 Bestimmung der AR-Parameter 20
3.5 Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion 21

3.6 Das Prony-Verfahren 23
3.7 Das ursprüngliche Prony-Verfahren 29
3.8 Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren 33
3.9 Spektrale Interpretation 38
3.10 Vorgehen bei bekannten Frequenzen 40

4 Hochauflösende Schätzverfahren (nichtparametrisch) 42
4.1 Der MUSIC-Algorithmus 42
4.2 Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR) 46

1 Parameterschätzung

Begriffe

- Unbekannte Parameter (dazu gehören zum Beispiel auch Abtastwerte der spektralen Leistungsdichte) können aus einer Messung (Beobachtung mit endlicher Dauer) im Allgemeinen **nicht berechnet** sondern **nur geschätzt** werden.
- Ein Schätzverfahren wird beurteilt nach dem Mittelwert und der Varianz seiner Schätzergebnisse.
- Ein Schätzer, dessen Mittelwert mit dem wahren Wert des Parametervektors übereinstimmt, heißt **erwartungstreu** (kein systematischer Fehler, engl.: *unbiased*).
- Ein Schätzer, der für zunehmende Fensterlänge (Messzeit, Probengröße) gegen den wahren Wert des Parametervektors konvergiert, heißt **konsistent**.
- Es gibt eine informationstheoretische untere Schranke für die Varianz einer Schätzung (zum Beispiel nach Cramér-Rao). Ein erwartungstreuer Schätzer, der diese Schranke erreicht, heißt **effizient**. Wenn er diese Schranke mit zunehmender Fensterlänge anstrebt, heißt er **asymptotisch effizient**.

Übersicht Spektralschätzverfahren

Klasse	Modell	Verfahren
Klassisch	—	Korrelogramm
	—	Blackman-Tukey
	—	Periodogramm
	—	Bartlett-Periodogramm
	—	Welch-Periodogramm
	—	Maximum-Entropy-Methode
Parametrisch	AR	Kovarianzverfahren
		Mod. Kovarianzverfahren
		Burg-Algorithmus
		Yule-Walker
	MA	All-Zero-Prozess
	ARMA	Mod. Yule-Walker
	e-Funktionen	Prony
	sin-Funktionen	Pisarenko-Zerlegung
	+ Rauschen	
Nicht-Parametrisch	—	MUSIC-Eigenanalyse
	—	EV-Eigenanalyse

2 Klassische Spektralschätzung

2.1 Autokorrelationsfolge (AKF)

Exakte Darstellung der AKF

$$r_{xx}[k] = \mathcal{E}\left\{x[n+k]x^*[n]\right\}$$

Schätzung der AKF

$$\hat{r}_{xx}[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{N-k} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-k-1} x[n+k]x^*[n] & \text{für } 0 \leq k \leq N-1 \\ \dfrac{1}{N-|k|} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n+|k|]x^*[n] & \text{für } -(N-1) \leq k < 0 \end{cases}$$

Autokorrelationsfolge (AKF)

Eigenschaften der Schätzung

- erwartungstreue Schätzung $\mathcal{E}\{\hat{r}_{xx}[k]\} = r_{xx}[k]$
- Varianz steigt mit zunehmendem Index k, weil die Länge der Mittelung abnimmt
- Varianz strebt mit zunehmender Datenlänge N gegen 0

Es handelt sich um eine konsistente Schätzung der AKF.

2.2 Korrelogramm

Exakte Darstellung des Leistungsdichtespektrums (LDS)

$$P_{xx}(f) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f k T} \qquad \text{(Wiener-Khintchine-Theorem)}$$

Korrelogramm

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{k=-L}^{L} \hat{r}_{xx}[k] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f k T}$$

- $r_{xx}[k]$ ist konjugiert gerade $\Rightarrow P_{xx}(f)$ ist rein reell
- $L \approx N/10$ (N: Länge der Datenfolge), wegen der sonst zunehmenden Varianz der AKF-Schätzung

2.3 Fensterung der AKF (Blackman-Tukey)

Schätzung des LDS

$$\hat{P}_{\mathrm{BT}}(f) = T \sum_{k=-L}^{L} w[k]\hat{r}_{xx}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fkT}$$

Erwartungswert

$$\mathcal{E}\left\{\hat{P}_{\mathrm{BT}}(f)\right\} = T \sum_{k=-L}^{L} w[k]r_{xx}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fkT} = P_{xx}(f) * W(f)$$

- Zeitfenster mit Bereichen $W(f) < 0$ erzeugen negative Werte für $P(f)$ $\Rightarrow$ **kein Rechteckfenster**
- $\hat{P}_{\mathrm{BT}}(f)$ ist mit zunehmendem L asymptotisch erwartungstreu
- Standardabweichung kleiner als ein Drittel des Mittelwertes

2.4 Periodogramm (auch: direkte Methode)

Exakte Darstellung des LDS

$$P_{xx}(f) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\left\{\frac{1}{(2N+1)T}\left|T\sum_{k=-N}^{N} x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fkT}\right|^2\right\}$$

Weglassen von $\mathcal{E}\{\cdot\}$ und endlich lange Datenfolge führt auf die Schätzung

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{T}{N}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fkT}\right|^2$$

Durch fehlende Erwartungswertbildung statistisch instabil.

$\Rightarrow$ **Ensemble-Mittelwert**

2.5 Mittelung von Periodogrammen (Bartlett)

Algorithmus

- Aufteilung der Datenfolge in nichtüberlappende Segmente
- Berechnung des Periodogramms $\hat{P}_{xx}(f)$ für jedes Segment (zum Beispiel mit FFT)
- Mittelung der unmodifizierten Einzelperiodogramme an jedem Frequenzpunkt $\Rightarrow$ Bartlett-Periodogramm

Eigenschaften

- Gleiche Fenstereffekte, wie Einzelperiodogramme
- $\operatorname{var}\{\hat{P}_B(f)\} \approx \dfrac{{P_{xx}}^2(f)}{\text{Anzahl der Segmente}}$
- Trade-off zwischen kleiner Varianz und hoher f-Auflösung

2.6 Mittelung von Periodogrammen mit Fensterung und Überlappung (Welch)

Algorithmus

- Wie Bartlett, aber Fensterfunktion über jedes Segment (Welch: Hann-Fenster)
- Überlappung der Segmente zulässig

Was ist dadurch gewonnen?

- Fensterung reduziert Nebenkeulen bei Spektren mit großer Dynamik, vermindert aber etwas das Auflösungsvermögen
- Durch Überlappung werden mehr Segmente gemittelt $\Rightarrow$ kleinere Varianz
- Bei 50 %-iger Überlappung ist eine effiziente Implementierung mit Hilfe des FFT-Algorithmus möglich

2.7 Kombination Periodogramm-Korrelogramm

Algorithmus

- Berechne Bartlett-Periodogramm (keine Überlappung, Rechteckfenster)
- Inverse FFT des Periodogramms (Schätzung der AKF)
- Fensterung der geschätzten AKF
- FFT ergibt Schätzung für die spektrale Leistungsdichte

Was ist dadurch gewonnen?

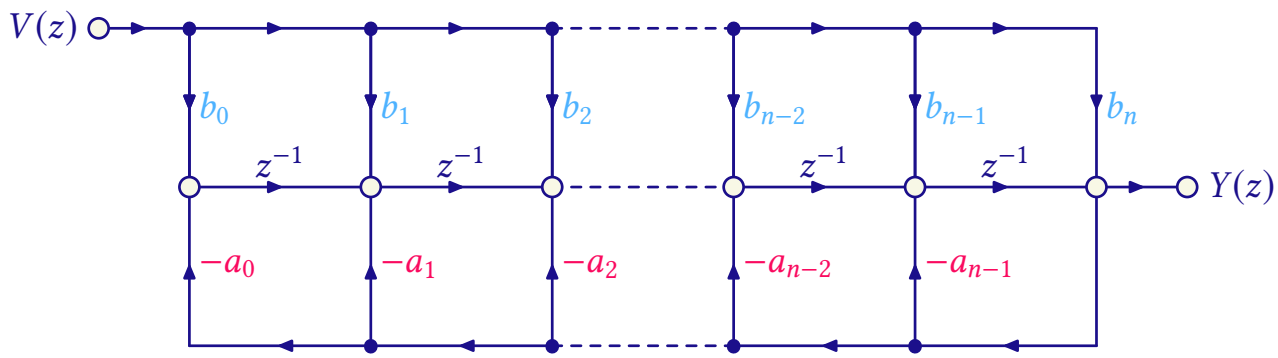
Gleiche statistische Eigenschaften wie Welch-Verfahren, aber halber Rechenaufwand (nur halb soviele Segmente müssen fouriertransformiert werden, keine Multiplikationen für eine Fensterung der Segmente)

2.8 Maximum-Entropy-Spektrum

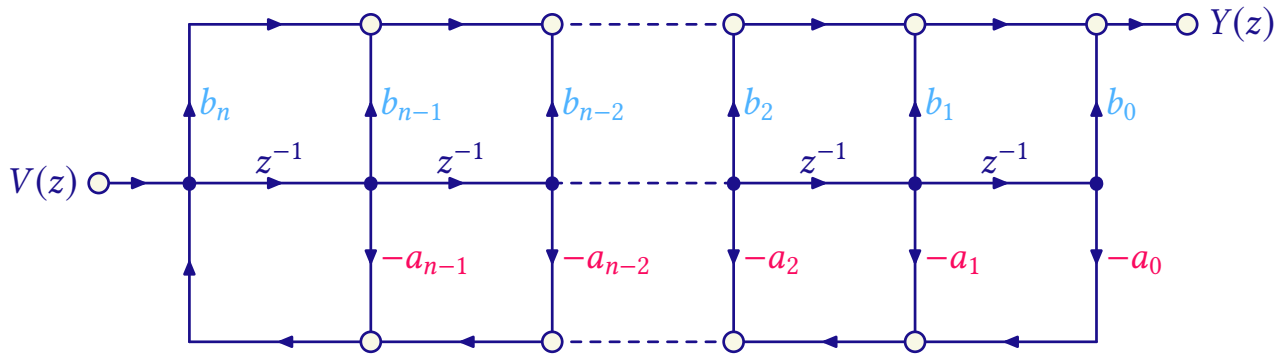
- Die Maximum-Entropy-Methode (MEM) vermeidet unrealistische Annahmen wie periodische Fortsetzung (diskrete Fourier-Transformation durch FFT) oder verschwindende Daten außerhalb des Beobachtungsfensters (Blackman-Tukey).
- Die MEM bestimmt das LDS des statistischen Prozesses mit der größten Informationsdichte, dessen AKF mit der gemessenen AKF im Beobachtungszeitraum übereinstimmt.
- Bei Modellierung eines stationären Prozesses sind das AR-Spektrum (Modellordnung M) und das MEM-Spektrum (Prädiktorlänge M) völlig äquivalent.

3 Hochauflösende Schätzverfahren (parametrisch)

3.1 Direkte Strukturen diskreter Filter



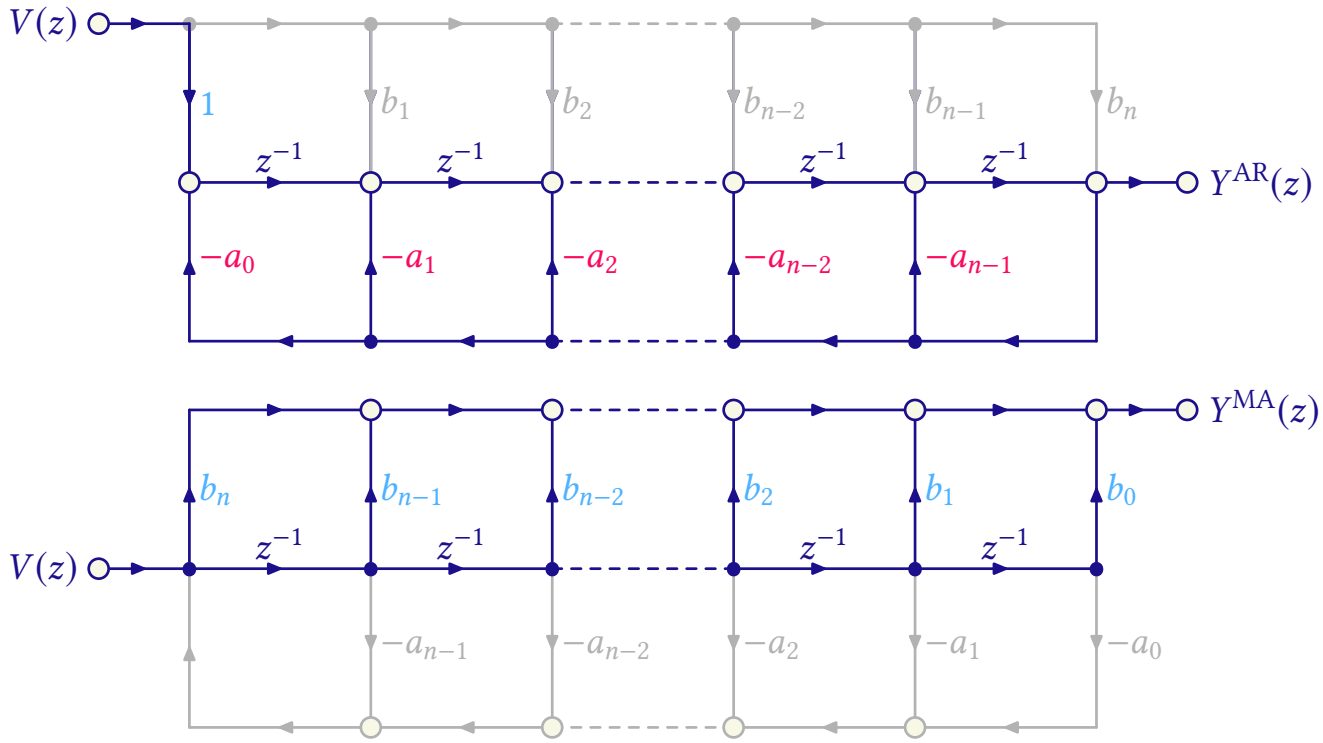
1. Struktur



2. Struktur

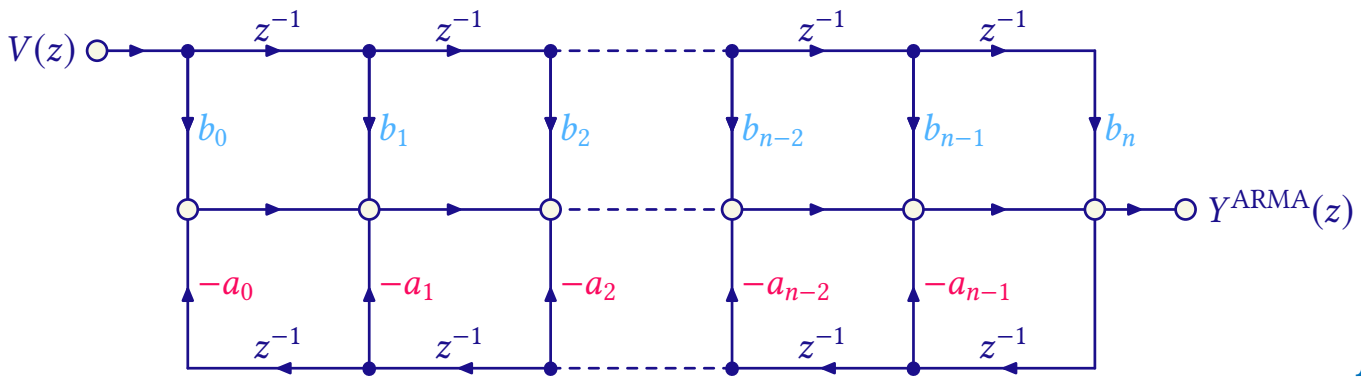
$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^\mu}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu} = b_m \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n} (z - z_{\infty\nu})} \quad ; \quad a_n = 1$$

3.2 Strukturen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen



AR
all-pole
IIR

MA
all-zero
FIR
tapped-delay-line



ARMA

3.3 Übertragungsfunktionen und Differenzengleichungen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen

$$H^{\mathrm{AR}}(z) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y[k] = -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y[k-\nu] + v[k]$$

$$H^{\mathrm{MA}}(z) = 1 + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu z^{-\mu} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y[k] = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu v[k-\mu]$$

$$H^{\mathrm{ARMA}}(z) = \frac{1 + \sum\limits_{\mu=1}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y[k] = -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y[k-\nu] + \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu v[k-\mu]$$

3.4 Bestimmung der AR-Parameter

Yule-Walker-Gleichung

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m-1] & r_{xx}[m-2] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}[1] \\ r_{xx}[2] \\ \vdots \\ r_{xx}[m] \end{pmatrix}$$

$$\sigma_w{}^2 = r_{xx}[0] + \sum_{k=1}^{m} a_k r_{xx}^*[k]$$

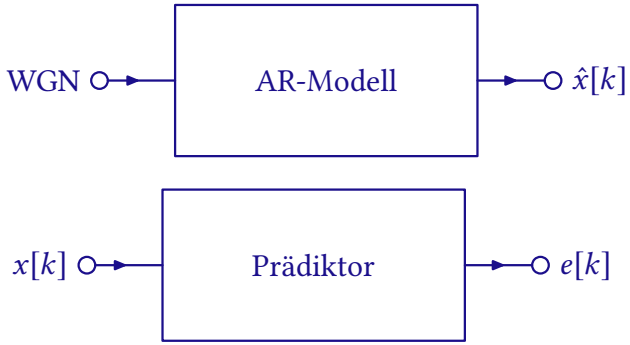
$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w{}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Levinson-Durbin-Rekursion

Algorithmus zur effizienten Lösung von Gleichungssystemen in Töplitz-Form

3.5 Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion

Vorwärtsprädiktion (VP) und AR-Modell sind eng verwandt:



$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{m} a_k x[n-k]$$

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{m} a_k x[n-k] + e[n]$$

Unterschiede AR ↔ VP

	AR-Filter	VP-Filter
Eingang	weißes Rauschen	$x[n]$
Ausgang	$\hat{x}[n]$	$e[n]$

Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion

- Das AR-Modell ist ein rekursives Filter mit den Koeffizienten a_k.
- Der Prädiktor ist ein MA-Filter mit den Koeffizienten $-a_k$.
- $\Rightarrow$ AR-Modell und Vorwärtsprädiktion sind zueinander komplementär.

Die Koeffizienten a_m, welche die Leistung des Prädiktionsfehlers minimieren, erhält man als Lösung von

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_{\min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.6 Das Prony-Verfahren

Zur Person Baron de Pronys

Gaspard de Prony (∗ 22. Juli 1755, † 29. Juli 1839), Familienname Riche, 1780 Ingenieur und 1790 Chefingenieur an der Ecole des Ponts et Chaussées, Zusammenarbeit unter Anderem mit Legendre und Carnot

Ursprung des Verfahrens

Gesetze zur Ausdehnung von Gasen können durch Linearkombinationen von (reellen abklingenden) e-Funktionen modelliert werden.

Prony entwickelte ein Verfahren um N Messpunkte durch e-Funktionen exakt zu beschreiben. Dabei waren soviele e-Terme zugelassen, wie für die exakte Lösung nötig waren.

Das Prony-Verfahren

Moderne Varianten

- Verwendung von e-Funktionen mit komplexen Exponenten (harmonische Funktionen mit und ohne Dämpfung)
- In der Regel deutlich mehr Abtastwerte als Exponentialterme
- spektrale Interpretation

Unterschiede zu anderen Verfahren

- Periodogramm und DFT verwenden **vorgegebene Frequenzen**
- AR, MA und ARMA verwenden **statistische Modelle**
- Das Prony-Verfahren **schätzt die Frequenzen**

Das Prony-Verfahren

Die Datenfolge $x[n]$ soll durch

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k {z_k}^{n-1}$$

modelliert werden, wobei mit $\Omega_k = \omega_k T$

$$z_k = \mathrm{e}^{(\alpha_k T + \mathrm{j}\Omega_k)} \qquad \text{die komplexen Schwingungen und}$$
$$h_k = A_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \qquad \text{deren komplexe Amplituden}$$

darstellen. Kriterium für die Güte der Modellierung ist die gesamte quadratische Abweichung

$$\varrho = \sum_{n=1}^{N} \left| x[n] - \hat{x}[n] \right|^2 ,$$

die zu minimieren ist.

Das Prony-Verfahren

Schwierigkeiten

- hoch nichtlineares Problem
- keine analytische Lösung möglich
- Iterationsverfahren (Gradientenverfahren, Newtoniteration) sind sehr rechenaufwendig und/oder finden nicht das globale Fehlerminimum.

Das Prony-Verfahren verwendet lineare Gleichungssysteme. Die Minimierung der quadratischen Abweichung ϱ ist dafür nicht ganz optimal.

Das Prony-Verfahren

Varianten

Prony-Verfahren

Es werden $2p$ komplexe Parameter ($h_1, \ldots, h_p$ und $z_1, \ldots, z_p$) verwendet, um $2p$ komplexe Abtastwerte ($x[1], \ldots, x[2p]$) **exakt** zu modellieren.

Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Wenn die Anzahl N der Abtastwerte größer ist, als die Anzahl $2p$ der Parameter, dann können die Abtastwerte durch die Exponentialfolge nur **approximiert** werden.

Erweitertes Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Verwendet ungedämpfte Einzelschwingungen ($\alpha_k = 0 \; \forall \; k$).

Prony-Spektrum

Das Prony-Verfahren ist eigentlich kein Spektralschätzverfahren. Die Schätzwerte Ω_k, φ_k, A_k und α_k können aber spektral interpretiert werden. Verschiedene Annahmen über das Signal außerhalb des Beobachtungsbereichs führen auf verschiedene Spektren.

Das Prony-Verfahren

Einzelschritte (bei allen Varianten)

1. Bestimmen der Prädiktionsparameter $a_0, \ldots, a_p$
2. Berechnen der α_k und der Ω_k aus den Nullstellen $z_1, \ldots, z_p$ eines Polynoms aus den Prädiktionsparametern
3. Die Lösung eines weiteren linearen Gleichungssystems liefert die Schätzwerte für A_k und φ_k

3.7 Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Exakte Darstellung der Datenfolge durch

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} A_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \cdot \mathrm{e}^{(\alpha_k T + \mathrm{j}\Omega_k)(n-1)} = \sum_{k=1}^{p} h_k {z_k}^{n-1} \,. \tag{1}$$

Umschreiben in

$$\begin{pmatrix} {z_1}^0 & {z_2}^0 & \cdots & {z_p}^0 \\ {z_1}^1 & {z_2}^1 & \cdots & {z_p}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {z_1}^{p-1} & {z_2}^{p-1} & \cdots & {z_p}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[p] \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Prony entdeckte ein Verfahren, um die Bestimmung der zeitabhängigen Parameter z_k und der zeitunabhängigen Parameter h_k zu separieren.

Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Definiere ein Polynom, dessen Nullstellen die z_k sind:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{p}(z - z_k) = \sum_{m=0}^{p} a_m z^{p-m}, \quad a_0 = 1\,. \tag{3}$$

Durch Verschieben des Index in (1) nach $n - m$, Multiplikation mit a_m und Summation ergibt sich

$$\sum_{m=0}^{p} a_m x[n-m] = \sum_{k=1}^{p} h_k \sum_{m=0}^{p} a_m z_i^{n-m-1}\,, \tag{4}$$

für $p + 1 \leq n \leq 2p$.

Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Die Substitution ${z_k}^{n-m-1} = {z_k}^{n-p-1} {z_k}^{p-m}$ ergibt

$$\sum_{m=0}^{p} a_m x[n-m] = \sum_{k=1}^{p} h_k {z_k}^{n-p-1} \sum_{m=0}^{p} a_m {z_k}^{p-m} = 0\,.$$

Die rechte Seite entspricht dem Polynom (3), ausgewertet an allen seinen Nullstellen.

Aus den Werten a_m, die diese Gleichung erfüllen, ergeben sich p Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \cdots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[2p-1] & x[2p-2] & \cdots & x[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[2p] \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Einzelschritte

1. Löse (5) $\longrightarrow$ Koeffizienten a_m des charakteristischen Polynoms (3)
2. Bestimme die Nullstellen z_k des charakteristischen Polynoms (3)

$$\alpha_k = \frac{\ln|z_k|}{T}\ 1/\mathrm{s}$$

$$f_k = \frac{\arg\{z_k\}}{2\pi T}\ \mathrm{Hz}$$

3. Löse (2)

$$A_k = |h_k|$$
$$\varphi_k = \arg\{h_k\}$$

3.8 Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Problem

- Wenn mehr Abtastwerte als Parameter vorliegen, kann die Modellierung nur approximativ sein.
- Das vollständige Kleinste-Quadrate-Problem ist extrem nichtlinear und nicht analytisch lösbar.

Lösung

Minimiere zunächst nicht $\varrho = \sum_{n=1}^{N} |x[n] - \hat{x}[n]|^2$, sondern den Fehler

$$e[n] = \sum_{m=1}^{p} a_m x[n-m]$$

der Vorwärtsprädiktion.

Das Auffinden der entsprechenden Prädiktionsparameter a_m entspricht exakt der Vorwärtsprädiktion nach dem Kovarianzverfahren.

Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Entscheidung: Wieviele e-Terme sollen verwendet werden?

- Eigenwertanalyse
- FPE *final prediction error*
- AIC *Akaike information criterion*
- MDL *minimum description length*
- CAT *criterion autoregressive transfer*
- GMV *gesunder Menschenverstand* (oftmals beste Lösung)

Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Koeffizienten a_m) ergeben die $z_1, \ldots, z_p$.

Das Restproblem „Minimiere ϱ“ ist linear in den verbleibenden Parametern $h_1, \ldots, h_p$.

Es wird gelöst durch

$$\left(Z^{\mathrm{H}} Z\right) \boldsymbol{h} = Z^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$$

wobei

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {z_1}^{N-1} & {z_2}^{N-1} & \cdots & {z_p}^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix}.$$

Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Modifikation: keine Dämpfung ($\alpha_k = 0 \longrightarrow |z_k| = 1$)

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} \left(h_k {z_k}^{n-1} + {h_k}^* ({z_k}^*)^{n-1} \right) .$$

Charakteristisches Polynom

$$P(z) = \prod_{k=1}^{2p} (z - z_k) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{2p-k}$$

mit $a_0 = 1$, $a_{2p} = \prod z_k$ und $|a_{2p}| = 1$.

Wegen $1/z_k = {z_k}^*$ hat $a_{2p} z^{2p} P^*(z)$ die gleichen Nullstellen wie $P(z)$, daher ist $a_k = a_{2p} {a_{2p-k}}^*$.

Differenzengleichung

$$x[n-p] + \sum_{k=1}^{p} (g_p[k] x[n-p+k] + {g_p}^*[k] x[n-p-k]) = 0$$

Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Minimiere nicht den Prädiktionsfehler, sondern

$$\varrho_p = \sum_{n=p+1}^{N-p} \left| x[n] + \sum_{k=1}^{p} \left(g_p[k]x[n+k] + g_p{}^*[k]x[n-k] \right) \right|^2 .$$

Zugehörige Normalgleichung

$$\begin{pmatrix} r_{2p}[0,0] & \dots & r_{2p}[0,2p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{2p}[2p,0] & \dots & r_{2p}[2p,2p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_p[0] \\ \vdots \\ g_p[1] \\ 1 \\ g_p{}^*[1] \\ \vdots \\ g_p{}^*[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ 2\varrho_p \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}$$

mit $r_{2p}[j,k] = \sum_{n=2p+1}^{N} \left(x^*[n-j]x[n-k] + x[n-p+j]x^*[n-p+k] \right).$

3.9 Spektrale Interpretation

Voraussetzung: Annahme über den weiteren Verlauf von $\hat{x}[n]$, zum Beispiel

- einseitig unendlich ($\hat{x}[n] = 0 \ \forall \ n < 0$),
- zweiseitig symmetrisch.

Zugehörige $\mathcal{Z}$-Transformierte:

$$\hat{X}_1(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{h_k}{1 - z_k z^{-1}} \qquad \text{einseitig,}$$

$$\hat{X}_2(z) = \sum_{k=1}^{p} h_k \left(\frac{1}{1 - z_k z^{-1}} - \frac{1}{1 - (z_k{}^* z)^{-1}} \right) \qquad \text{zweiseitig.}$$

Diese konvergieren für $|z| > |z_k|$.

Sind ferner $|z_k| < 1$ (keine anklingenden Terme), dann ergibt die Substitution $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ die DFT von $\hat{x}$.

Spektrale Interpretation

Prony-Spektrum

$$\hat{S}_\nu(f) = \left|T\hat{X}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|^2, \qquad \Omega = 2\pi f T$$

Eigenschaften

- $\nu = 1$: geeignet für transiente Signale
- $\nu = 2$: deckt auch ungedämpfte Schwingungen ab
- Beide Spektren können schmalbandige oder breitbandige Anteile modellieren.
- Starkes Rauschen bedingt hohe Schätzfehler bei den α_k (meist viel zu groß).

3.10 Vorgehen bei bekannten Frequenzen

Es seien q Frequenzen $z_1, \ldots, z_q$ bekannt, nicht aber deren Amplituden.

Das charakteristische Polynom kann zerlegt werden:

$$\sum_{m=0}^{p} a_m z^m = \left(\sum_{k=0}^{q} c_k z^k \right) \left(\sum_{i=0}^{p-q} \alpha_i z^i \right) .$$

Koeffizientenvergleich und Einsetzen der a_m in (4):

$$\sum_{m=1}^{p} a_m x[n-m] = \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{q} c_k \alpha_{m-k} \right) x[n-m] = 0$$

für $p + 1 \leq n \leq 2p$.

Vorgehen bei bekannten Frequenzen

Umstellen ergibt eine Faltung (entspricht Filterung):

$$\sum_{m=0}^{p-q} \alpha_m y[n-m] = 0 \quad \text{mit} \quad y[n] = \sum_{k=0}^{q} c_k x[n-k] \,.$$

Einzelschritte

1. Originaldaten filtern, Koeffizienten c_k aus den bekannten Polen
2. Kovarianzverfahren zur Schätzung der α_m. Die Nullstellen des verkürzten Polynoms $\sum \alpha_i z^i$ sind Schätzwerte für die unbekannten Pole.
3. Bestimmen der Schätzwerte für die komplexen Amplituden h_k nach der Kleinste-Quadrate-Methode

4 Hochauflösende Schätzverfahren (nichtparametrisch)

4.1 Der MUSIC-Algorithmus

AKF des Modellsignals (M komplexe Schwingungen in weißem Rauschen mit Varianz σ^2):

$$r_{xx}[k] = \sum_{i=1}^{M} P_i \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega_i} + \sigma^2 \delta_0[k] \qquad ; \qquad \Omega_i = \omega_i T \tag{6}$$

Autokorrelationsmatrix ($p+1$ Abtastwerte):

$$\boldsymbol{R}_p = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}{}^*[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{M} P_i \boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i{}^{\mathrm{H}} + \sigma \boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}_p + \boldsymbol{N}_p \tag{7}$$

mit

$$\boldsymbol{s}_i = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_i} & \dots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Omega_i} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Jedes Vektorprodukt $\boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i{}^{\mathrm{H}}$ ist eine Matrix mit Rang 1.

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}\{\boldsymbol{S}_p\} &= M < p+1 \\ \mathrm{Rang}\{\boldsymbol{N}_p\} &= p+1 \end{aligned}$$

Der MUSIC-Algorithmus

Die Signalmatrix hat folglich nur M von Null verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$.

Signalraum Die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M$ spannen den gleichen Raum auf, wie die Signalvektoren $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_M$.

Rauschraum $\boldsymbol{v}_{M+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p+1}$ spannen den Rauschraum auf.

Unitarität der Eigenvektoren Die Eigenvektoren der hermiteschen Matrix $\boldsymbol{R}_p$ sind paarweise unitär (konjugiert orthogonal).

Die Einheitsmatrix ergibt sich also auch durch

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{p+1} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{H}}$$

und damit die Eigenwertzerlegung von $\boldsymbol{R}_p$

$$\boldsymbol{R}_p = \boldsymbol{S}_p + \boldsymbol{N}_p = \sum_{i=1}^{M} (\lambda_i + \sigma) \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{H}} + \sum_{i=M+1}^{p+1} \sigma \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{H}} . \tag{8}$$

Der MUSIC-Algorithmus

Rauschraum-Frequenzschätzung

Die Signalvektoren $\boldsymbol{s}_i$ sind orthogonal zu jeder Linearkombination aus Basisvektoren des Rauschraumes:

$$\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{H}} \left(\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k \boldsymbol{v}_k \right) = 0 \,. \tag{9}$$

Skalarprodukte mit gewichteten Linearkombinationen

$$\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k |\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\Omega) \boldsymbol{v}_k|^2 = \boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\Omega) \left(\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}} \right) \boldsymbol{e}(\Omega)$$

wobei

$$\boldsymbol{e}(\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} & \dots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Omega} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

sind immer dann 0, wenn $\boldsymbol{e}(\Omega) = \boldsymbol{s}_i$.

Der MUSIC-Algorithmus

Die **Frequenzschätzfunktion**

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k |\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\Omega)\boldsymbol{v}_k|^2} \tag{10}$$

hat Pole an den Stellen $\Omega = \Omega_i$.

MUSIC-Verfahren: $\alpha_k = 1 \quad \forall k \quad :$

$$P_{\mathrm{MUSIC}}(\Omega) = \frac{1}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\Omega)\left(\sum\limits_{k=M+1}^{p+1} \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k{}^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{e}(\Omega)}$$

- In der Praxis keine Pole wegen Schätzfehler, aber sehr scharfe Peaks
- $P_{\mathrm{MUSIC}}(\Omega)$ ist keine Schätzung der spektralen Leistungsdichte sondern ein Frequenzschätzer für schmalbandige Komponenten
- Die Trennung von Signalraum und Rauschraum geschieht anhand der relativen Größen der Eigenwerte λ_i („Threshold“)

4.2 Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Folge der Länge N mit M unbekannten (fehlenden) Gliedern:

$$\boldsymbol{x} = \{x[0], x[1], \cdots, x[k-1], \underbrace{\tilde{x}[k], \tilde{x}[k+1], \cdots, \tilde{x}[k+M-1]}_{M \text{ unbekannte Samples}}, x[k+M], \cdots, x[N-1]\}$$

Die Folge sei beschrieben durch P Autoregressionskoeffizienten $a_1, \ldots, a_P$:

$$x[m] = \sum_{k=1}^{P} a_k \, x[m-k] + e[m]$$

Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

$$
\begin{pmatrix}
e[P] \\ e[P+1] \\ \vdots \\ e[k-1] \\ e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1] \\ e[k+M+P] \\ e[k+M+P+1] \\ \vdots \\ e[N-1]
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
x[P] \\ x[P+1] \\ \vdots \\ x[k-1] \\ \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-2] \\ x[k+M+P-1] \\ x[k+M+P] \\ x[k+M+P+1] \\ \vdots \\ x[N-1]
\end{pmatrix}
-
\begin{pmatrix}
x[P-1] & x[P-2] & \cdots & x[0] \\
x[P] & x[P-1] & \cdots & x[1] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x[k-2] & x[k-3] & \cdots & x[k-P-1] \\
x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-P] \\
\tilde{x}[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-P+1] \\
\tilde{x}[k+1] & \tilde{x}[k] & \cdots & x[k-P+2] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x[k+M+P-3] & x[k+M+P-4] & \cdots & \tilde{x}[k+M-2] \\
x[k+M+P-2] & x[k+M+P-3] & \cdots & \tilde{x}[k+M-1] \\
x[k+M+P-1] & x[k+M+P-2] & \cdots & x[k+M] \\
x[k+M+P] & x[k+M+P-1] & \cdots & x[k+M+1] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-P-1]
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{P-1} \\ a_P
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X} =
\begin{pmatrix}
x[P-1] & x[P-2] & \cdots & x[0] \\
x[P] & x[P-1] & \cdots & x[1] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x[k-2] & x[k-3] & \cdots & x[k-P-1] \\
x[k+M+P-1] & x[k+M+P-2] & \cdots & x[k+M] \\
x[k+M+P] & x[k+M+P-1] & \cdots & x[k+M+1] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-P-1]
\end{pmatrix}
$$

Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x[P] & x[P+1] & \dots & x[k-1] & x[k+M+P] & x[k+M+P+1] & \dots & x[N-1] \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Schätzung der AR-Koeffizienten durch die Kleinste-Quadrate-Normalgleichung:

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1$$

Gleichungen mit den unbekannten Gliedern:

$$\begin{pmatrix} e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-2] \\ x[k+M+P-1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-P] \\ \tilde{x}[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-P+1] \\ \tilde{x}[k+1] & \tilde{x}[k] & \cdots & x[k-P+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k+M+P-3] & x[k+M+P-4] & \cdots & \tilde{x}[k+M-2] \\ x[k+M+P-2] & x[k+M+P-3] & \cdots & \tilde{x}[k+M-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{P-1} \\ a_P \end{pmatrix}$$

Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Umschreiben in

$$
\begin{pmatrix}
e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ e[k+3] \\ e[k+4] \\ \vdots \\ e[k+P-1] \\ e[k+P] \\ e[k+P+1] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1]
\end{pmatrix}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_2 & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_3 & -a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\
-a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & -a_{P-3} & \cdots & 0 \\
0 & -a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -a_P & -a_{P-1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{P-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_P
\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}
\begin{pmatrix}
\tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \tilde{x}[k+3] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k+M-1]
\end{pmatrix}
+
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
-a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & \cdots & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -a_P & -a_{P-1} & \cdots & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_P & \cdots & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_P & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_{P-1} & -a_{P-2} & -a_{P-3} & \cdots & -a_1 & 1
\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}
\begin{pmatrix}
x[k-P] \\ x[k-P+1] \\ x[k-P+2] \\ \vdots \\ x[k-1] \\ 0 \\ \vdots \\ x[k+M] \\ x[k+M+1] \\ x[k+M+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-1]
\end{pmatrix}
$$

Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Der gesamte quadratische Fehler ist

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}_1\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2)$$

und dieser wird Minimiert durch

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{LSAR}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k+M-1] \end{pmatrix}_{\mathrm{LSAR}} = -\left(\boldsymbol{A}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\right)\boldsymbol{x}_2$$

Quellen und weiterführende Literatur

[1] P. M. T. Broersen: "Autoregressive Model Orders for Durbin's MA and ARMA Estimators". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* SP-48.8 (August 2000), pp. 2454–2457.

[2] J. Capon: "High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis". In: *Proceedings of the IEEE* 57.8 (August 1969), pp. 1408–1418.

[3] Y. T. Chan, J. M. M. Lavoie, and J. B. Plant: "A Parameter Estimation Approach to Estimation of Frequencies of Sinusoids". In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* ASSP-29 (April 1981), pp. 214–219.

[4] C. E. Davila: "A Subspace Approach to Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Measurements". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* SP-46.2 (February 1998), pp. 531–534.

[5] P. M. Djurić and S. M. Kay: "Spectrum Estimation and Modelling". In: *The Digital Signal Processing Handbook*. Ed. by V. K. Madisetti and D. B. Williams. Boca Raton: CRC Press, 1998. Chap. 14.

[6] P. M. Djurić and H.-T. Li: "Bayesian Spectrum Estimation of Harmonic Signals". In: *Signal Proc. Letters* 2 (1995), pp. 213–215.

[7] B. Friedlander: "Efficient algorithm for ARMA spectral estimation". In: *IEE-Proceedings-F-(Communications,-Radar-and-Signal-Processing)* 130.3 (April 1983), pp. 195–201.

[8] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory.* 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

[9] K. D. Kammeyer: *Nachrichtenübertragung.* 3. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2004.

[10] K. D. Kammeyer und K. Kroschel: *Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit Matlab®-Übungen.* 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.

[11] S. M. Kay: *Estimation Theory.* Vol. 1. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993.

[12] S. M. Kay and S. L. Marple: "Spectrum Analysis. A Modern Perspective". In: *Proceedings of the IEEE* 69.11 (November 1981), pp. 1380–1419.

[13] J. Makhoul: "Linear Prediction: A Tutorial Review". In: *Proceedings of the IEEE* 63.4 (1975). Corr. in Proc. IEEE Vol. 64 (1976), No. 2, 285, pp. 561–580.

[14] S. L. Marple: *Digital Spectral Analysis.* Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1987.

[15] S. L. Marple: "Frequency resolution of Fourier and maximum entropy spectral estimates". In: *Geophysics* 47.9 (September 1982), pp. 1303–1307.

[16] S. J. Orfanidis: *Optimum Signal Processing.* 2nd ed. Rutgers University: 2007. URL: *http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/osp2e/* (visited on 01/27/2013).

[17] J. G. Proakis and D. G. Manolakis: *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications.* 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

[18] R. O. Schmidt: "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation". In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-34.3 (1986), pp. 276–280.

[19] H. W. Schüßler: *Analyse diskreter Signale und Systeme.* 5. Aufl. Bd. 1. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2008.

[20] H. W. Schüßler: *Entwurf und Realisierung von digitalen Systemen.* Bd. 2. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2009.

[21] P. Stoica, B. Friedlander, and T. Søderstrøm: "High-order Yule-Walker estimation of the parameters of autoregressions from noisy measurements". In: *Identification and System Parameter Estimation 1988. Selected Papers from the Eighth IFAC/IFORS Symposium.* Vol. 2. Oxford: Pergamon, 1989, pp. 1001–1006.

[22] S. V. Vaseghi: *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction.* 1st ed. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.